

ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ “Любен Каравелов”  
гр. София

---

Любен Евтимов Любенов

**УТОЧНЕНО МОДЕЛИРАНЕ НА  
КОНТАКТНИ ЗАДАЧИ С МЕТОД НА  
КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ**

АВТОРЕФЕРАТ

София, 2012 г.

ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ “Любен Каравелов”  
гр. София

---

Любен Евтимов Любенов

**УТОЧНЕНО МОДЕЛИРАНЕ НА КОНТАКТНИ  
ЗАДАЧИ С МЕТОД НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ**

**АВТОРЕФЕРАТ  
на  
ДИСЕРТАЦИЯ**

за получаване на образователна и научна степен “доктор”

Научна специалност:  
01.02.03 “Строителна механика, съпротивление на материалите”

Научни ръководители:  
проф. д-р. инж. Банко Петков Банков  
проф. д-р. инж. Константин Савков Казаков

София, 2012 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра “Механика и математика” при ВСУ “Любен Каравелов” – София. Дисертацията съдържа 162 страница, 324 формули, 103 фигури, 20 таблици и 192 литературни източника.

## Съдържание

<b>Въведение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1</b>	<b>5</b>
1. 1. Кратки исторически бележки	5
1.2. Модели на земна основа	5
1.3. Връзка между винклеровата константа и физическите характеристики на земната основа	6
1.4. Преглед на съществуващите методи за решаване на греда на еластична основа	6
1.5. Устойчивост на прът в еластична среда (единичен пилот)	9
1.6. Приложение на числени методи за изследване на греда на еластична основа	13
1.6.1. Приложение на МКЕ за изследване на греда на еластична основа	13
1.6.2. Приложение на МКЕ за изследване на устойчивост на прави пръти в еластична среда.	16
1.7. Цели и задачи на дисертацията	17
<b>Глава 2</b>	<b>18</b>
2.1. Приложение на винклеров модел в метода на крайните елементи при хиперболо-тригонометрично апроксимиране на функциите на формата	18
2.2. Изчисляване на винклеровата константа при многопластова среда	24
2.3. Изследване размерите на близката зона	27
2.4. Методи за определяне на винклеровата константа в някои програмни системи	35
<b>Глава 3</b>	<b>36</b>
3.1. Устойчивост на греда на еластична основа (прът в еластична среда) изследвана по МКЕ и хиперболо-тригонометрична апроксимация на функциите на формата	36
3.2. Проверка влиянието на удължаването, дължащо се на реакцията на средата върху критичната сила.	39
3.3. Влияние на закона за разпределение на реакцията на средата върху критичната сила	41
3.4. Влияние на страничното триене върху критичната сила	43
3.5. Отчитане на разпределено осово натоварване по МКЕ. Моделиране на странично триене	47
3.6. Отчитане влиянието на опорните условия при частично забит в еластична среда прът	49
Основни приноси в дисертацията	53
Литература	54
Публикации на автора свързани с дисертацията	56

## Въведение

Проблемите свързани с изследване на контактните зони между конструкция и земна основа са от съществено значение за здравината на всяка една конструкция. Известни са много класически решения на задачата, но спецификата на земната основа поражда повече въпроси отколкото отговори. От една страна е налице стремеж за използване на все по-точни и адекватни физически модели, а от друга страна е стремежът към по-прости в изчислително отношение математически симулации. Очевидно това са несъвместими изисквания, които могат да се удовлетворят само частично благодарение на някакъв разумен компромис. Спецификата на проблема прави разглежданата задача винаги актуална.

С бурното развитие на числените методи в последните няколко десетилетия и най-вече на съпътстващото развитие на техниката става възможно численото решение на сложните диференциални и интегрални уравнения описващи реални физични обекти и явления. Безспорно към момента един от най-популярните, а може би и най-популярният числен метод е МКЕ. Именно поради тази причина той е избран за основен метод в провежданото изследване. Предмет на разглеждане са линейни обекти (греди и пилоти) и контакта им с еластична среда (земна основа). Тъй като в класическата си постановка МКЕ използва полиномна апроксимация на функциите на формата, което при наличие на еластична среда не е съвсем точно, в настоящата работа се предлага използването на крайни елементи с хиперболо-тригонометрична апроксимация на функциите на формата.

**В Глава 1** е дадена обща характеристика на разглеждания проблем и неговото историческо развитие. Коментирани са основните групи характерни модели на земната основа. Разгледани са основните аналитични решения на гредата на еластична основа и устойчивост на прът в еластична среда, а също така и възможностите за прилагане на МКЕ за решаване на същите.

**В Глава 2** се разглежда прилагането на винклеров модел в комбинация с метод на крайните елементи и хиперболо-тригонометрично апроксимиране на функциите на формата. Прави се сравнение с класическата полиномна апроксимация. Предлага се метод за определяне на винклеровата константа при двупластова среда с наклонени пластове. Изследвани са размерите на “близката зона”. Разгледани са характерни случаи на нееднородност на средата и влиянието им върху разпределението на напреженията.

**В Глава 3** основно място заема изследването на устойчивостта на осово натоварен прът в еластична среда. Проблемът е изследван с МКЕ при хиперболо-тригонометрични функции на формата и при съгласувана и несъгласувана с това апроксимиране геометрична матрица на коравина. Направена е проверка за влиянието на удължаването, дължащо се на реакцията на средата, върху критичната сила. Изследвано е влиянието на осово разпределен товар върху изменението на критичния параметър. Проведено е параметрично изследване при напречни въздействия, при различни модели на еластичната среда и различни опорни условия. Формулирани са определени изводи въз основа на получените резултати.

## Глава 1

### 1.1. Кратки исторически бележки

Проблемите наблюдавани в контактните зони между конструкция и земна основа са се зародили почти едновременно с появата и развитието на строителството. Условие за дълговечността на една конструкция е добрата и основа.

Паралелно с развитието на фундаментостроенето се появяват и първите научни трудове свързани с него. Римския архитект Витрувий е първият известен автор на такъв труд (I в. пр. н. е.). В неговия трактат се дават правила основани на опита. Първите теоретични изводи и изчисления за фундаменти обаче са от XVIII век.

Именно богатата строителна практика поддържала интереса към това да се моделира все по-прецизно работата на конструктивни елементи в контакта им със земната основа.

В следващите параграфи от настоящата глава е направен подробен преглед на съществуващите модели на земната основа, както и на различните изчислителни модели на хоризонтални и вертикални елементи, намиращи се в контакт с нея. Става ясно, че задачите с които ще се занимаваме са интердисциплинарни, в “сечението” на Строителната и Земната механика

За по-добра цялостност и логичност на изложението част от литературния преглед е включен на подходящото място в останалите части на настоящият труд.

### 1.2. Модели на земна основа

В исторически план първият модел на земната основа е моделът на **Винклер (Winkler -1867)**. При него се допуска, че деформацията във всяка точка от основата е пропорционална на приложения в точката товар и не зависи от товарите приложени в съседни точки. Най-същественият недостатък на модела е, че предполага липсата на разпределителна способност на земната основа. Другата крайност – безкрайно голяма разпределителна способност се предполага при използване на другия много използван модел, този на еластичното изотропно полупространство. Начален тласък за развитието на модела дава работата на **Boussinesq (1885)**. Върху развитието му през 50-те, 60-те и 70-те години на XX век са работили: **Горбунов-Посадов, Герсеванов, Галин, Lur'e, Harr, Hetenyi, Клеин, Власов и Леонтъев** и др.

Ясно е, че и двата модела не отразяват точно поведението на земната основа, чиято разпределителна способност има крайна големина. Опит да се примирят двете крайни тенденции изразени от моделите на **Винклер** и еластичното изотропно полупространство е разработването на редица дву и три параметрични модели, които предлагат крайна по големина разпределителна способност. При разработването на тези модели са следвани два основни подхода. При единия за основа на двупараметричния модел се приема този на Винклер, като допълнително се осигурява връзка между отделните пружини. Такива са моделите предложени от **Филоненко-Бородич (1940, 1945), Hetenyi (1946), Пастернак (1954), Kerr (1964)**. Другото направление взема за основа модела “еластично изотропно полупространство”, като са направени някои опростявания по отношение на

разпределението на напреженията и деформациите. Пример за такива модели са тези предложени от **Reissner** (1958) и от **Власов** и **Леонтьев** (1966).

Обикновено земната основа е многопластова среда и за моделирането и са възможни два подхода: привеждането и към условна еднородна среда и прилагане на някои от горните модели; и използването на модели, отразяващи слоестия характер на средата. При втория подход е възможно използването на един от следните модели:

- Един еластичен слой лягащ върху неподдаваема основа. Върху този модел са работили **Егоров, Biot, Pickett, Poulos**.

- Един еластичен слой лягащ върху идеално еластично полупространство. Върху този модел са работили **Burmister, Fox, Lemcoe, Harr**.

- Многопластова еластична система. Върху този модел са работили **Burmister, Acum** и **Fox, Paria, Jones, Meyerhof, Poulos** и **Davis**.

Наред с разгледаните модели е направен опит за съвместното използване на моделите на **Винклер** и еластичното изотропно полупространство. Такива са предложените от **Репников** и **Shtaerman**. По същество те представляват еластична среда армирана с винклерови пружинки.

Въпреки очевидните си недостатъци моделът на **Винклер** е все още най-широко прилаган в инженерната практика. Причините за това са следните: моделът е относително прост, лесен е за програмна реализация и същевременно отговаря сравнително добре на действителното поведение на земната основа. От друга страна методите за изследване на физическите характеристики на земната основа, както и силно изразената и нехомогенност, водят до много широки граници за стойността на винклеровата константа.

### **1.3. Връзка между винклеровата константа и физическите характеристики на земната основа**

На база сравняване на решения по модела на еластично изотропното полупространство и по хипотезата на Винклер се предлагат редица зависимости между винклеровата константа и физическите характеристики на земната основа. В някои от формулите се отчита и коравината на връхната конструкция. Други са изведени на база пласт с ограничена мощност, който заменя модела на еластично изотропно полупространство. Тези зависимости са разгледани подробно от **Етимов, Божинов** и **Гочева** в [15], като там е направено и сравнение между получените резултати по различните формули. Там се вижда, че стойностите на винклеровата константа се изменят в много широки граници в зависимост от използвания начин на пресмятането им.

### **1.4. Преглед на съществуващите методи за решаване на греда на еластична основа.**

Най-ранните известни работи по проблема принадлежат на **Winkler** (1867), **Hertz** (1884), **Zimmermann** (1888). Съществен принос също така имат и **Reissner** (1937), **Hetenyi** (1946), **Горбунов-Посадов** (1949), **Seely** и **Smith** (1952), **Тимошенко** и **Krieger** (1959), **Власов** и **Леонтиев** (1966) и др. **Fletcher** and **Herman** (1999) анализират греда върху еластична основа от винклеров тип, а също така и по-точни математически модели отразяващи свойствата на еластичната основа.

Алтернативни методи за решение са предложени от **Levinton** (1947) и **Wright** (1952). Итеративни процедури за решение са представени от **Biezeno** и **Grammel** (1956), **Gazis** (1958), **Penzien** (1960), **Blaszковиак** и **Kaczkowski** (1966). **Попов** (1951) предлага графично решение. При решението на къса греда на еластична основа **Pipes** и **Iwinski** (1967) демонстрират успешно техника на интегрална трансформация. Стъпков процес на интегриране е предложен от **Malter** (1958). Метод с помощта на линии на влияние е разработен от **Ray** (1958), **Iyengar** и **Anantharamu** (1965). Използвани са матрични методи от **Iyengar** (1965), **Mozingo** (1967), **Fraszer** (1969), **Bowles** (1974, 1977). Демонстрирано е успешно използване на безразмерни функции на влияние от **Dodge** (1964). Решение за прът в еластична среда е предложено от **Lee** (1961), **Matlock** и **Wayne** (1963), **Iyengar** и **Anantharamu** (1965), **Matlock** и **Haliburton** (1965) и **Godden** (1965). Във връзка с железопътното строителство **El-Aini** (1976) разглежда проблема за устойчивост на греда на еластична основа. За приблизително решение на дълга греда на еластична основа **Greenberg** (1971) и **Robinson** и **Ungar** (1974) използват функции на **Green**. Демонстрирани са инвариантни методи от **Mayer** (1973) и **Distefano** (1974) за решаване на къса греда лежаща върху линейна и нелинейна винклерова среда.

У нас моделът на **Winkler** е използван в трудовете на **Симеонов, Гочева, Етимов, Димитров** и **Павлова, Карамански** и **Рангелов, Казаков, Хамова**. На база на гореспоменатия модел са разработени програми за автоматизирано изчисление на фундаменти от **Мишонов, Кърджиев, Калчев, Благоев, Павлова** и **Карамански**. Стандартно решение на греда на винклерова еластична основа е показан в труда на **Банков** [7].

В настоящият труд е разгледано по-подробно решението на къса греда върху еластична основа по метода на началните параметри (фиг.1.1). Уравнението на еластичната линия на гредата е:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - k_s v = q(x), \quad (1.20)$$

където:

$v(x)$  - напречното преместване на оста на гредата,

$EI$  - огъвната коравина на гредата,

$k_s$  - винклеровата константа на средата,

$q(x)$  - разпределеното по дължината на гредата натоварване.

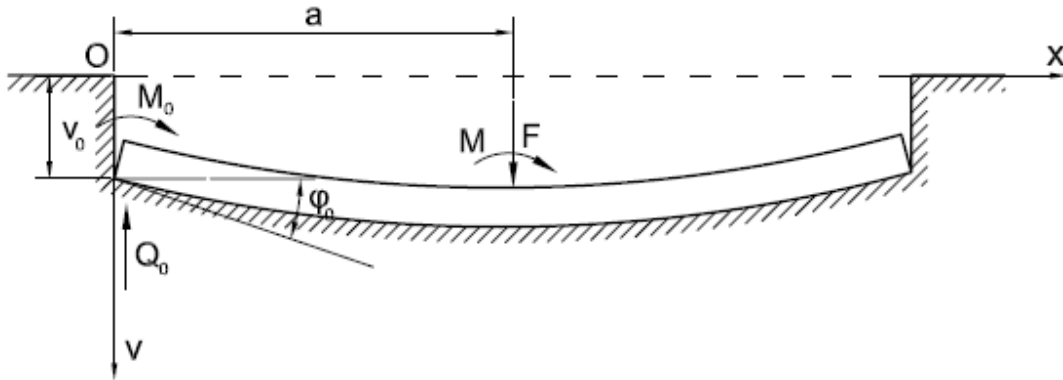
Уравнението (1.19) може да се представи и по следния начин:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - 4\alpha^4 v = \frac{q(x)}{EI}, \quad (1.21)$$

където е извършено полагането:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s}{4EI}}. \quad (1.22)$$





Фиг. 1.1.

Хомогенното решение може да се представи в една от следните две форми:

$$v_h = e^{\alpha x} (A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (A_3 \cos \alpha x + A_4 \sin \alpha x) \quad (1.24)$$

или

$$v_h = C_1 \cosh \alpha x \cos \alpha x + C_2 \cosh \alpha x \sin \alpha x + C_3 \sinh \alpha x \cos \alpha x + C_4 \sinh \alpha x \sin \alpha x. \quad (1.25)$$

Интеграционните константи в (1.24) и (1.25) могат да бъдат определени от граничните условия.

Четири неизвестни интеграционни константи, изразени чрез началните параметри в левия край са:

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0, \\ C_2 &= \frac{\varphi_0}{2\alpha} - \frac{Q_0}{4\alpha^3 EI}, \\ C_3 &= \frac{\varphi_0}{2\alpha} + \frac{Q_0}{4\alpha^3 EI}, \\ C_4 &= -\frac{M_0}{2\alpha^2 EI}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

След заместване на (1.28) в (1.25) се получава следният израз за провисването при известни начални параметри:

$$v_h = v_0 \cosh \alpha x \cos \alpha x + \frac{\varphi_0}{\alpha} \frac{\cosh \alpha x \sin \alpha x + \sinh \alpha x \cos \alpha}{2} - \frac{M_0}{\alpha^2 EI} \frac{\sinh \alpha x \sin \alpha x}{2} - \frac{Q_0}{\alpha^3 EI} \frac{\cosh \alpha x \sin \alpha x - \sinh \alpha x \cos \alpha}{4}. \quad (1.29)$$

Хиперболо-тригонометричните функции, участващи в (1.29) могат да се представят по следния начин:

$$A_x = \cosh \alpha x \cos \alpha x, \quad (1.30.1)$$

$$B_x = 0,5(\cosh \alpha x \sin \alpha x + \sinh \alpha x \cos \alpha x), \quad (1.30.2)$$

$$C_x = 0,5 \sinh \alpha x \sin \alpha x, \quad (1.30.3)$$

$$D_x = 0,25(\cosh \alpha x \sin \alpha x - \sinh \alpha x \cos \alpha x). \quad (1.30.4)$$

Последните са познати като функции на Крилов [56]. Тези функции притежават следните важни свойства:

- 1) При  $x = 0$ :  $A_x = 1$  и  $B_x = C_x = D_x = 0$ ;
- 2) Всяка производна на една от функциите може да се изрази чрез точно една от другите функции.

Критерият според който гредите се разделят на **корави**, **къси** и **дълги** е субективен и донякъде спорен. Различните литературни източници и различните автори предлагат различни граници за относителната дължина при тази класификация.

*Мнението на автора, имайки предвид поведението на функциите на Крилов при нарастване на променливата в аргумента е, че една греда може да се счита за къса, ако изпълнява условието  $\pi/4 \leq \alpha l < 3\pi/4$ .*

### 1.5. Устойчивост на прът в еластична среда (единичен пилот).

Първите изследвания на проблема за устойчивост на еластични системи принадлежат на **Euler**. С развитието на теорията на проблема “устойчивост” са свързани още много изследователи. Тук ще изброим накратко някои от тях: **Lagrange**, **Ляпунов**, **Theodore von Karman**, **Engesser**, **Тимошенко**, **Shanley**, **Kirchhoff**, **Власов**, **Prandtl**, **Michell**, **Wagner**, **Chandler**, **R. von Mises**, **Ratzersdorfer**, **Chwalla**, **Boussinesq**, **Biezeno**, **Steuermann**.

Тъй като най-естественото приложение на модела “прът в еластична среда” е единичният пилот, ще обърнем по-специално внимание на пилотното фундиране. Ранните изследвания върху устойчивостта на пилоти (**Granholm**, 1929) показват, че за забивни пилоти с нормални размери, изкълчване на практика може да настъпи само в много слаби почви. С увеличаване използването на стройни и дълги пилоти (микропилоти), които продължават на значително разстояние над терена обаче възможността за настъпване на загуба на устойчивост не е толкова пренебрежима. (**Bjerrum**, 1957, **Brandzaeg** и **Harboe**, 1957). По тази причина от втората половина на XX в. и до сега има редица изследвания, целящи по-точна оценка на критичната сила при пилоти. По проблема са работили **Mascardi** (1970, 1982) и **Gouvenot** (1975), **Brittsan** и **Speer** (1993), **Cadden** (2001) и **Gomez** (2004).

Аналитичното определяне на критичния параметър на осовото натоварване за прът в еластична среда се разглежда в повечето класически курсове по *Устойчивост на еластичните системи*. Обикновено се приема, че еластичната среда оказва

съпротивление на преместванията по закона на **Винклер**. Решението се получава от следното диференциално уравнение:

$$v^{IV}(x) + \frac{F}{EI} v''(x) = \frac{k}{EI} v(x), \quad (1.37)$$

в което:

$F$  - осовата натискава сила,

$E$  - еластичният модул на пръта,

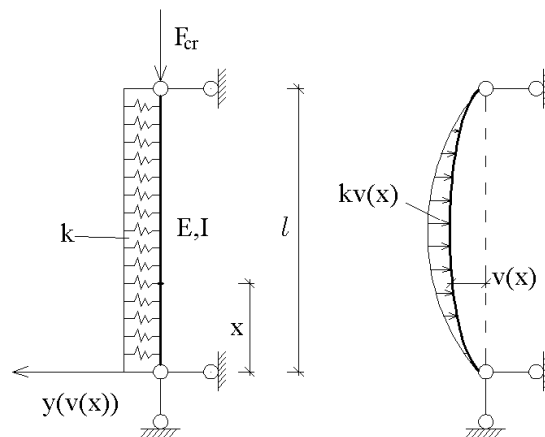
$I$  - инерционният момент на напречното сечение,

$k$  - еластичната константа на средата,

$v$  - напречното преместване по дължина на пръта.

Едно от първите решения е дадено от **Тимошенко** (1936) за прът с два свободно подпирани края (*фиг.1.2*):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left( n^2 + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI} \right) \quad (1.39)$$



**Фиг. 1.2.**

От (1.39) се вижда, че  $F_{cr}$  зависи от броя на полуълните  $n$  на възможната синусоидална равновесна форма. Стойността на  $n$  от своя страна зависи от характеристиката на еластичната среда  $k$ . От това решение става ясно, че абсолютният минимум на критичния товар е:

$$F_{cr} = 2\sqrt{kEI}. \quad (1.46)$$

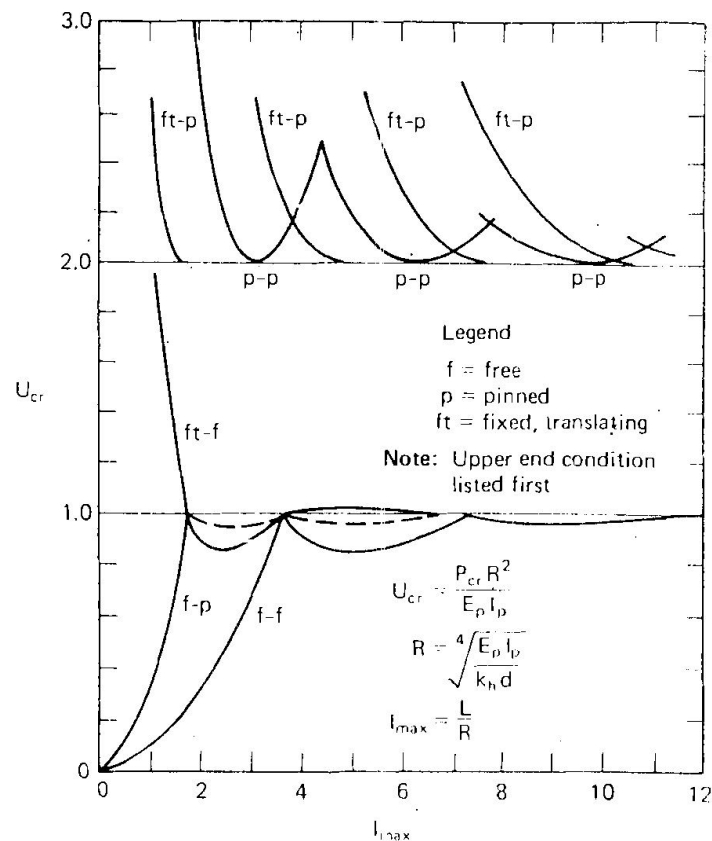
В [129] **Hetenyi** също предлага аналитично решение за критичната сила при свободно подпирани в двата си края греда на еластична основа. Даденият от него израз е

напълно идентичен с (1.39). Разликата с изложението по-горе начин за определяне на критичната сила е единствено в определянето на броя полуълни  $n$  участващи във формула (1.39). В [129] се дава също и решение за греда запъната в двата си края. До стойността на критичната сила се достига чрез метода на пробата и грешката. Едно добро приближение за критичната сила за разглеждания случай е:

$$F_{cr} = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2} + 2\sqrt{kEI} \quad (1.52)$$

В [173] **Terzaghi** отбелязва накратко решението на **Cummings**, за свободно подпряна греда на еластична основа от винклеров тип. Там обаче се засягат само граничните случаи при различен брой полуълни.

Решение за различни опорни условия е дадено от **Davisson** (1963), в бездимензионна форма, във вид на номограма (фиг.1.6). Решението се основава на следните предположения: константен осов товар, както и постоянен по височина на пилота коефициент на леглото.



Фиг. 1.6.

Едно алтернативно представяне на решението, в което пилотът се разглежда като свободно подпрян прът с еквивалентна дължина в отсъствието на еластична среда, е

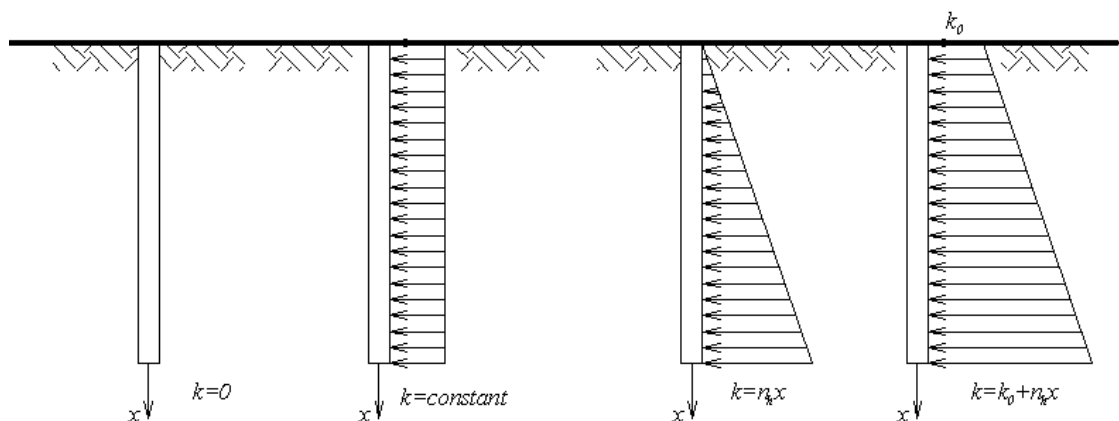
дадено от **Francis** (1965) и **Toakley** (1965). Еквивалентната дължина  $l_e$  е функция на опорните условия в двата края на пилота и на разпределения по височина на пилота коефициент на леглото  $k_h$ .

Решение за различни гранични условия при линейно изменящо се  $k$  ( $k = n_h x$ ) е предложено от **Davisson** (1963). Напълно очаквано начинът на закрепване на горния край на пилота се оказва решаващ при загубата на устойчивост. Това е така, защото пилотът се стреми да се изкълчи там където почвената реакция е по-малка.

**Prakash** (1987) получава решение за критичната сила в затворена форма с помощта на енергетичните методи, за пилот ставно подпрян в двата си края, както и за такъв запънат в двата си края и изменяща се характеристика на еластичната среда в дълбочина (с начална стойност  $k_0$ ). На *фиг. 1.9* са представени разгледаните от него четири случая на изменение на характеристиката на среда в дълбочина:

- 1) Характеристиката на средата е константа и равна на нула ( $k_0 = k = 0$ );
- 2) Характеристиката на средата е константа в дълбочина ( $k_0 = k$ );
- 3) Характеристиката на средата нараства линейно от нула до крайната си стойност ( $k = n_h x$ );
- 4) Характеристиката на средата нараства линейно от начална стойност  $k_0 \neq 0$  ( $k = k_0 + n_h x$ ).

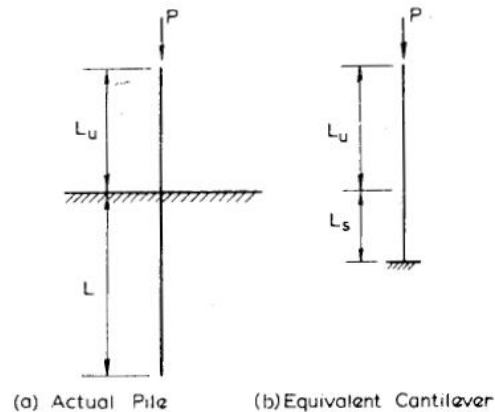
В предлагания от **Prakash** изследователски труд влиянието на дължината на пилота, характеристиката на средата и граничните условия върху критичния товар и формата на загуба на устойчивост е изследвано върху пилот със следните характеристики: дължина – до 24m, огъвна коравина равна на 477  $\text{tm}^2$ . Харистиките на средата се менят в границите:  $k_0$  от 0 до 2000  $\text{tm}^2$ , а  $n_h$  от 0 до 2000  $\text{tm}^3$ .



**Фиг. 1.9.**

**Davisson** и **Robinson**(1965) представят решение за относително дълъг пилот. Като относително дълъг те определят пилот за който пресметнатата безразмерна дължина  $l_{\max}$  е

по-голяма от 4. Дватама представят действителния пилот като конзола с еквивалентна дължина (фиг. 1.10).



Фиг. 1.10.

Ефектът от осово разпределения товар върху критичната сила е изследван от Francis (1965), Toakley (1965), Reddy и Valsangkar (1970) и Gabr (1997).

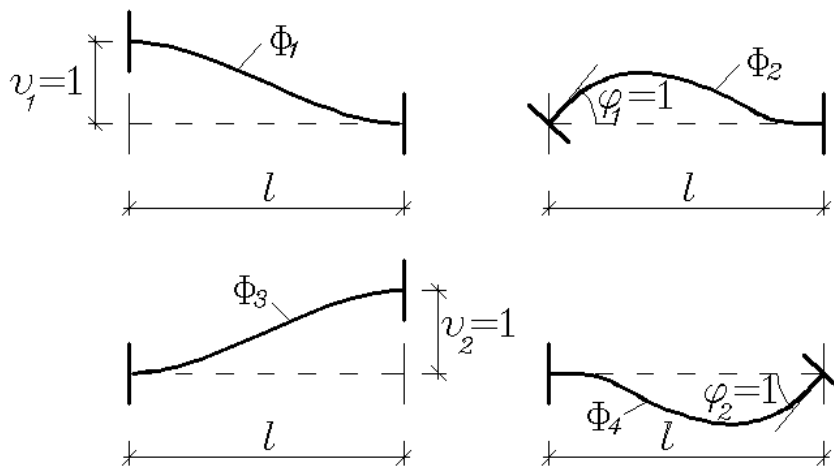
### 1.6. Приложение на числени методи за изследване на гредата на еластична основа.

Традиционно аналитичните методи очевидно дават “точно” решение за сравнително прости случаи на натоварване и гранични условия, при постоянни геометрични и материални характеристики на гредата. Това ограничение и бурното развитие на компютърната техника в последните две десетилетия води до широкото прилагане на редица числени методи, сред които най-популярни са МКР, МКЕ, както и методът на граничните елементи. Тук ще бъде разгледан по-подробно МКЕ, заради най-широкото му приложение в практиката, дължащо се на няколко негови предимства пред останалите числени методи.

#### 1.6.1. Приложение на МКЕ за изследване на гредата на еластична основа.

Ще отделим внимание на добре известното от литературата приложението на МКЕ при гредови елементи. При тях се приемат за възлови параметри напречните премествания и техните първи производни (завъртанията). Традиционно за апроксимираща функция на преместванията в границите на елемента се приема пълен полином от трета степен. При това приемане се получават следните функции на формата (фиг. 1.13):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right), & \Phi_2 &= \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right), \\ \Phi_3 &= \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right), & \Phi_4 &= \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right).\end{aligned}\tag{1.82}$$



**Фиг. 1.13** Функции на формата при полиномна апроксимация

Отчитането на реакцията на еластичната среда може да стане по един от следните начини:

А) Прибавяне към диагоналните коефициенти, отговарящи на напречното преместване на пружинна константа еквивалентна на реакцията на основата, от среда до среда на краен елемент.

Б) Прибавяне към елементната матрица на втора матрица  $[k_r]$ , отчитаща влиянието на еластичната основа. Последната се получава от зависимостта:

$$[k_r] = k_s \int_0^l [\Phi]^T [\Phi] dx,\tag{1.85}$$

и има следния вид:

$$[k_r] = \frac{k_s l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}.\tag{1.86}$$

В) Друг интересен подход предлага директно получаване на матрицата на коравина, без сумиране на две отделни компоненти. Той е предложен в нашата

литература от **Етимов** и **Благоев** [38] и от **Карамански** [51]. В чуждата литература такъв подход е предложен от **Eisenberger**, **Felipa**, **Melerski** и др. Подробности могат да се видят в [6]. Идеята се базира на метода на началните параметри, приложен върху крайния елемент разгледан като къса греда на еластична основа. При това положение матрицата на коравина се записва във вида:

$$[k_{ел.осн.}] = \frac{EI}{E_4} \begin{bmatrix} 4\alpha^3 E_1 & 2\alpha^2 E_2 & -8\alpha^3 B & 8\alpha^2 C \\ 2\alpha^2 E_2 & 2\alpha E_3 & -8\alpha^2 C & 8\alpha D \\ -8\alpha^3 B & -8\alpha^2 C & 4\alpha^3 E_1 & -2\alpha^2 E_2 \\ 8\alpha^2 C & -2\alpha^2 E_2 & -22l & 2\alpha E_3 \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

където:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_s}{4EI}},$$

$$E_1 = 2(AB + 4CD),$$

$$E_2 = 4(B^2 - AC),$$

$$E_3 = 4(BC - AD),$$

$$E_4 = 8(C^2 - BD).$$

$A, B, C, D$  са стойностите на функциите на Крилов при  $x = l$ .

В голяма част от литературните източници такъв гредови краен елемент е наречен “точен”.

Хиперболо-тригонометричните функции могат да се представят и като сума от безкрайни степенни редове. Ако се задържат само първите два члена в редовете и се извършат съответните преобразования, се получава сбора на матриците  $[k]$  и  $[k_r]$ .

Решението предложено от **Eisenberger** се базира на израз за вертикалните премествания записан във вида:

$$v(x) = v_0 A_x + \frac{1}{\alpha} \varphi_0 B_x - \frac{1}{\alpha^2 EI} M_0 C_x + \frac{1}{\alpha^3 EI} Q_0 D_x, \quad (1.92)$$

където с  $A_x, B_x, C_x$  и  $D_x$  са означени интеграционите константи които се получават от граничните условия. Двата подхода са напълно идентични и дават еднакви числени стойности за елементните матрици на коравина.

Подходът предложен от **Felipa** се базира на същите предпоставки както изложените по-горе методи, но извода на формулите е извършен с помоща на програмния продукт **Matemtica**. Поради този факт изведените изрази са доста дълги и сложни, което затруднява прякото им прилагане. В работата на **Felipa** е разгледано развитие на изразите в степенен ред за практическото им прилагане.

Малко по-различен израз за елементната матрица на “точен” гредови краен елемент предлага **Melerski** [148]:



$$[k^{ел.осн.}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12\overline{k_{11}} & 6l\overline{k_{12}} & -12\overline{k_{13}} & 6l\overline{k_{14}} \\ 6l\overline{k_{12}} & 4l^2\overline{k_{22}} & -6l\overline{k_{23}} & 2l^2\overline{k_{24}} \\ -12\overline{k_{13}} & -6l\overline{k_{23}} & 12\overline{k_{33}} & -6l\overline{k_{34}} \\ 6l\overline{k_{14}} & 2l^2\overline{k_{24}} & -6l\overline{k_{34}} & 4l^2\overline{k_{44}} \end{bmatrix}. \quad (1.97)$$

Главното достойнство на последната постановка е, че елементната матрица на коравина (1.97) може да се използва и за елементи които не лежат върху еластична основа при полагането:  $\overline{k_{ij}} = 1$ . Подобно на (1.97) е и представянето на матрицата на коравина за греда на еластична основа в [51].

В случая на двупараметричен модел на еластичната среда имаме елементна матрица съставена от три компонента:

$$[k_e^{ел.осн.}] = [k_e] + [k_{r1}] + [k_{r2}], \quad (1.103)$$

където:

$[k_e]$  - елементна огъвна матрица на коравина,  
 $[k_{r1}]$  - матрица на коравина отчитаща първия параметър (пружинната константа),  
 $[k_{r2}]$  - матрица на коравина отчитаща втория параметър (съпротивлението на срязване).

Подобно на еднопараметричния модел и при двупараметричния модел на греда върху еластична основа са правени опити да се получи решение по МКЕ базирано на аналитичното решение на гредата по МНП. В този случай елементната матрицата на коравина се получава отново като еднокомпонентна. Подробен запис на последната за двупараметричен модел с хиперболо-тригонометрични функции на формата може да се види в [166].

### 1.6.2. Приложение на МКЕ за изследване на устойчивост на прави пръти в еластична среда.

Традиционно приложение на МКЕ за пресмятане на критичен параметър на натоварване при отсъствие на еластична среда може да се види в [6].

За тази цел се търси решението на следното характеристично уравнение:

$$\det[[K] - [K_G]] = 0, \quad (1.109)$$

където:

$[K]$  е глобална матрица на коравина, получена посредством адресиране на съответните елементни матрици  $[k_e]$ ,

$[K_G]$  е глобална матрица на геометрична коравина, получена чрез адресиране на съответните елементни геометрични матрици  $[k_{Ge}]$ .

В случая на прът в еластична среда към елементната “огъвна” матрица се добавя матрицата, отразяваща работата на реакцията на основата. Ако използваме “точен” краен елемент, матрицата на геометрична коравина се получава от съответните функции на формата според израза:

$$[k_{Ge}] = \int_0^l [\Phi']^T [\Phi'] dx. \quad (1.111)$$

При прилагане на краен елемент с хиперболо-тригонометрични функции на формата, бихме могли да използваме геометричната матрица за коравина изведена за класически гредови краен елемент. Както ще бъде показано по-късно в **Глава 2** тази замяна не дава значително отражение върху точността на решението.

Друго интересно решение, в което огъвната матрица, приносът на еластичната среда и геометричната матрица на коравина са обединени в една обща матрица е предложено от Petrakis [162]. Освен това при разглежданото решение се отчита приносът на срязващата сила. Еластичната среда е двукомпонентна. В цитираната статия автора предлага намирането на критичната сила с помощта на алгоритъма на **Wittrick-Williams**. Допълнителни сведения за последния могат да се видят в [181].

Ако разгледаме прът подпрян ставно в двата си края, като краен елемент получаваме:

$$F_{cr} = \frac{EI}{l^2} \left\{ \frac{n^4 \pi^4 - n^2 \pi^2 (s^2 k_y^* + k_\phi^*) - k_y^* (1 - s^2 k_\phi^*)}{n^2 \pi^2 [1 + s^2 (n^2 \pi^2 - k_\phi^*)]} \right\}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.160)$$

Ако в (1.160) заместим  $s = 0$  и  $k_\phi^* = 0$  т.е. пренебрегнем влиянието на напречните сили и съпротивлението на средата срещу завъртането на пръта, ще получим аналитичната формула дадена в литературата [20], [23], [175] и др.

### 1.7. Цели и задачи на дисертацията.

Направения до тук литературен преглед показва, че:

А) От една страна – преобладаващите научни търсения в областта на контактните задачи целят да се уточнят моделите на еластичната среда, като се опишат по-прецизно нейните физико-механични показатели,

Б) От друга страна – в съответствие с уточнените модели на земната основа да се внесат съответните корекции в матричните оператори на Метода на крайните елементи, чрез които се описва якостното и стабилитетното състояние на “горното строене”, непосредствено контактуващо със земната основа.

**В съответствие с тези две тенденции ще си поставим следните две по-обща цели:**

**1. Въз основа на по-прецизното моделиране на земната основа да се уточнят матричните оператори, които описват крайните елементи използвани в контактната задача.**

**2. Да се приложат уточнени модели на крайни елементи при якостно и стабилитетно изследване на хоризонтални и вертикални гредови и прътови конструктивни компоненти върху или в еластична среда.**

От тези основни цели произтичат следните подзадачи:

3. Да се изследва разпределението на напреженията под фундаментната плоскост, съгласно модела на еластично изотропно полупространство. Да се формулират препоръки за приемане на дълбочина на “затихване” на напреженията. Да се предложи практически начин на дискретизация на база “близка” и “далечна” зона.

4. Да се провери влиянието на затихване на деформациите в дълбочина върху стойността на винклеровата константа.

5. Да се предложи прост практичен начин за определяне на еластична винклерова константа при многопластова среда и наклонени спрямо хоризонта пластове.

6. Да се получи винклеровата константа с МКЕ при модела ел. изотр. полупр. и модела пласт с ограничена мощност. Да се сравнят получените стойности и да се формулират съответните изводи.

7. Да се изследва влиянието на удължаването, дължащо се на реакцията на средата върху критичната сила при осово натоварен прът в еластична среда.

8. Да се изследва прът в многослойна среда. Да се изследва влиянието на начина на разпределение на реакцията на средата в дълбочина.

9. Да се изследва начина на подпиране върху критичната сила.

10. Да се изследване влиянието на страничното триене върху критичната сила на осово натоварен прът в еластична среда.

## Глава 2

### **2.1. Приложение на винклеров модел в метода на крайните елементи при хипероло-тригонометрично апроксимиране на функциите на формата.**

Повечето програмни продукти базирани на МКЕ използват класически гредови краен елемент с 4 или 6 възлови неизвестни. При такава постановка функцията на напречните премествания е алгебричен полином от 3-та степен. Имайки предвид зависимостта  $M = -EIv''(x)$  след двукратно диференциране на такъв полином ще получим линейна диаграма на огъващите моменти. Тя би съответствала на концентрирано приложени по дължината на гредата товари. Очевидно такова моделиране е твърде приблизително за греда на еластична основа, където реакцията на основата е разпределена непрекъснато по дължината и. От казаното става ясно, че точността при използването на такъв елемент за решаване на греда на еластична основа силно зависи от броя на използваните при дискретизирането елементи. Това неудобство се компенсира донякъде със значителното увеличаване на броя им при дискретизация. С оглед на казаното по-горе за недостатъците на полиномната функция на преместванията, ще потърсим по-удачен начин за апроксимирането им. Ще разгледаме гредови краен елемент, при който апроксимация на функцията на напречното преместване на оста на

гредата се извършва с хиперболо- тригонометрични функции. Тази идея е предложена в нашата литература от **Етимов** [38]. Константата на еластичната среда участва като множител в аргумента на хиперболо-тригонометричните съставки на функциите на формата и поради това при предлагания краен елемент матрицата  $[k^{ел.осн.}]$ , се получава директно, без да се налага сумиране на гредовата матрица с матрица отчитаща влиянието на средата. При извеждането на функцията на напречните премествания  $v(x)$  се използва добре познатото решение на къса греда на еластична основа по метода на началните параметри. След известни преобразования за  $v(x)$  се получава изразът:

$$v(x) = C_1 A_x + C_2 B_x + C_3 C_x + C_4 D_x, \quad (2.4)$$

В горната формула са използвани следните означения:

$$A_x = \cosh(\xi) \cos(\xi), \quad (2.5.1)$$

$$B_x = 0,5(\cosh(\xi) \sin(\xi) + \sinh(\xi) \cos(\xi)), \quad (2.5.2)$$

$$C_x = 0,5 \sinh(\xi) \sin(\xi), \quad (2.5.3)$$

$$D_x = 0,25(\cosh(\xi) \sin(\xi) - \sinh(\xi) \cos(\xi)). \quad (2.5.4)$$

Формули (2.5.1)-(2.5.4) представляват функциите на Крилов [56]. Тези функции притежават две много полезни свойства:

При  $x=0$  имаме  $A_x=1$  и  $B_x=C_x=D_x=0$  и освен това производната на всяка от функциите на Крилов се изразява също чрез функция на Крилов. Последното много добре може да се види от табл.2.1.

**Таблица 2.1.** Функции на Крилов и техните производни

$I$	$F_x$	$F'_x$	$F''_x$	$F'''_x$	$F^{(4)}_x$
1	$A_x$	$-4D_x$	$-4C_x$	$-4B_x$	$-4A_x$
2	$B_x$	$A_x$	$-4D_x$	$-4C_x$	$-4B_x$
3	$C_x$	$B_x$	$A_x$	$-4D_x$	$-4C_x$
4	$D_x$	$C_x$	$B_x$	$A_x$	$-4D_x$

Интеграционните константи  $C_1, C_2, C_3, C_4$  в (2.4) се определят от граничните условия. Променливата  $\xi$  във формули (2.5.1)-(2.5.4), представлява приведената абсциса и се получава по формулата:

$$\xi = \alpha x, \quad (2.6)$$

където:

$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_w}{4EI}}$  е коефициент на деформация на елемента.

Ще изведем функциите на формата за краен елемент при който напречните премествания се подчиняват на израза (2.4). От (2.5.1) до (2.5.4) и (2.4) при съответните гранични условия лесно получаваме стойностите на интеграционните константи. И така имайки четирите интеграционни константи, получаваме израза за съответната функция на формата:

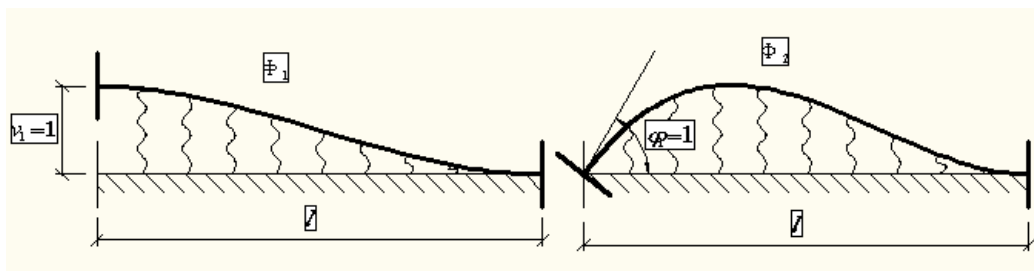
$$\Phi_1 = A_x - \frac{AC + 4D^2}{C^2 - BD} C_x + \frac{AB + 4CD}{C^2 - BD} D_x, \quad (2.10.1)$$

$$\Phi_2 = B_x + \frac{AD - BC}{C^2 - BD} C_x + \frac{B^2 - AC}{C^2 - BD} D_x, \quad (2.10.2)$$

$$\Phi_3 = \frac{C}{C^2 - BD} C_x - \frac{B}{C^2 - BD} D_x, \quad (2.10.3)$$

$$\Phi_4 = \frac{-D}{C^2 - BD} C_x + \frac{C}{C^2 - BD} D_x. \quad (2.10.4)$$

Графично представяне на функциите, може да се види на фиг. 2.1.



Фиг. 2.1. Първа и втора функции на формата

Използвайки формули (2.5.1-2.5.4) и (2.10.1)-(2.10.4) доказваме следните две равенства:

$$\frac{AC + 4D^2}{C^2 - BD} = \frac{B^2 - AC}{C^2 - BD}, \quad (2.12.1)$$

$$\frac{AD - BC}{C^2 - BD} = -2 \frac{AB + 4CD}{C^2 - BD}. \quad (2.12.2)$$

Последното води до допълнително опростяване на изчисленията при реализирането на метода на компютър.

На база на така получените функции на формата при хиперболо-тригонометрична апроксимация, след съответни опростяващи преобразувания получаваме следната матрица на коравина за разглеждания елемент:

$$[k^{ел.осн.}] = \frac{EI}{E_4} \begin{bmatrix} 4\alpha^3 E_1 & 2\alpha^2 E_2 & -8\alpha^3 B & 8\alpha^2 C \\ 2\alpha^2 E_2 & 2\alpha E_3 & -8\alpha^2 C & 8\alpha D \\ -8\alpha^3 B & -8\alpha^2 C & 4\alpha^3 E_1 & -2\alpha^2 E_2 \\ 8\alpha^2 C & 8\alpha D & -2\alpha^2 E_2 & 2\alpha E_3 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

където:

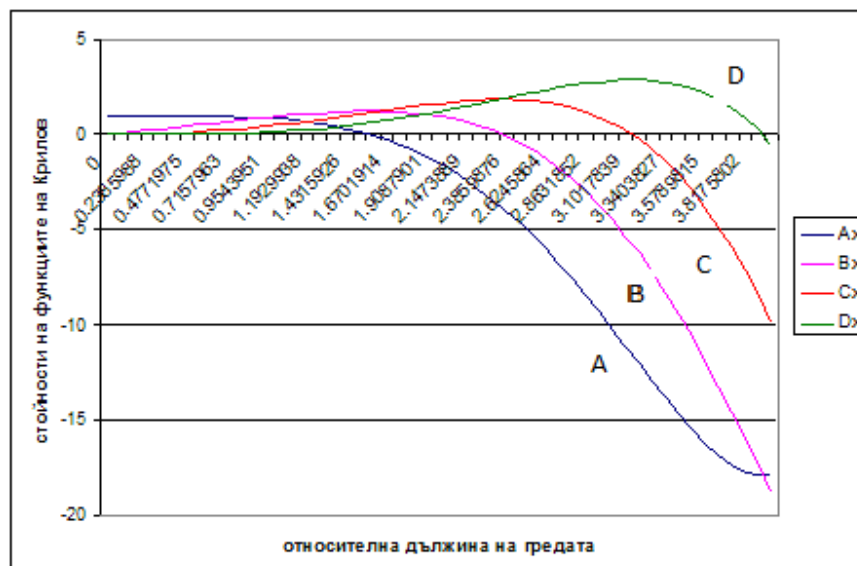
$$E_1 = 2(AB + 4CD), \quad (2.14.1)$$

$$E_2 = 4(B^2 - AC), \quad (2.14.2)$$

$$E_3 = 2(BC - AD), \quad (2.14.3)$$

$$E_4 = 8(C^2 - BD). \quad (2.14.4)$$

На фиг.2.2 са показани графиките на функциите на Крилов в зависимост от приведената дължина на гредата. От фигурата ясно се вижда, че изменението на четирите функции е сравнително равномерно до стойности на приведената дължина около 2-2,5 след което рязко променят характера си. Това кореспондира с приемането, че над тази стойност гредата на еластична основа вече не се класифицира като къса (виж Глава1).



Фиг. 2.2. Графики на функциите на Крилов

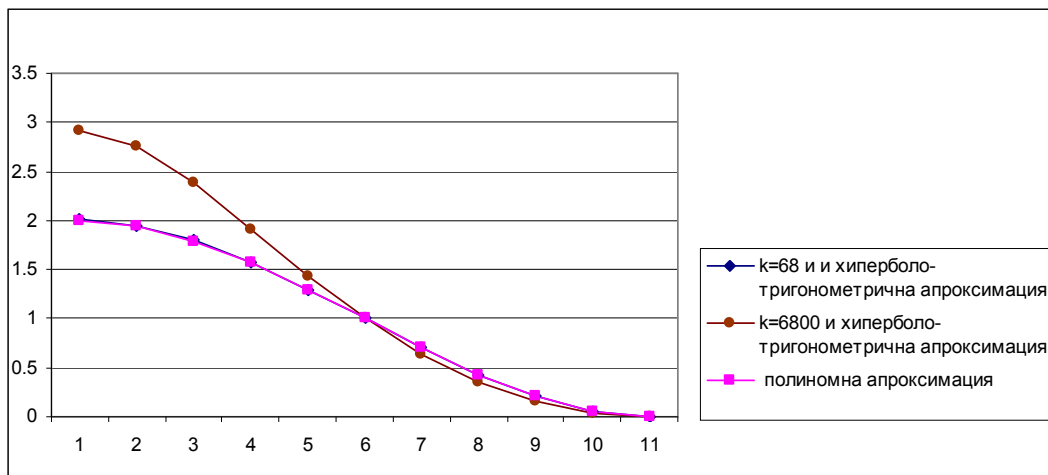
Да направим сравнение между очертанието на функциите на формата при полиномна и при хиперболо-тригонометрична апроксимация. За целта крайният елемент е разделен на 10 части и са пресметнати отношенията на напречните премествания в характерните точки към преместването в средата на елемента за всяко едно от кинематичните въздействия и при двата вида апроксимация. При хиперболо-тригонометричната апроксимация променяме също и стойността на еластичната константа. Резултатите са представени в табл.2.2 и табл. 2.3, както и на фигури от фиг. 2.3 до фиг. 2.6.

**Таблица 2.2.** Относителни стойности на напречното преместване по дължината на крайния елемент вследствие единично преместване в началния му възел при различни стойности на еластичната константа на средата

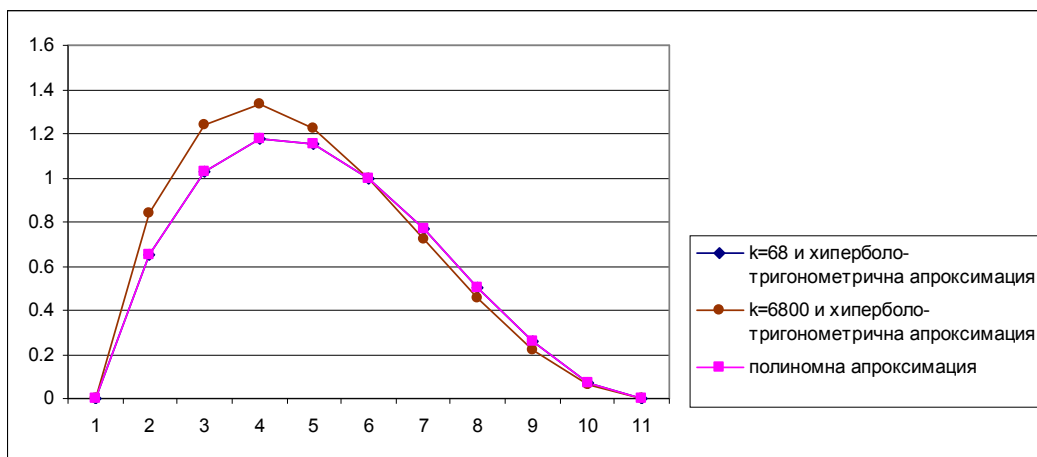
a.L	k=0	k=68	k=136	k=204	k=272	k=340	k=680	k=1360
0	2.000	2.00834	2.01670	2.02508	2.03346	2.04187	2.08414	2.16988
0.1	1.944	1.95145	1.95892	1.96641	1.97391	1.98141	2.01914	2.09562
0.2	1.792	1.79749	1.80299	1.80850	1.81402	1.81955	1.84730	1.90344
0.3	1.568	1.57128	1.57456	1.57785	1.58114	1.58444	1.60098	1.63436
0.4	1.296	1.29735	1.29871	1.30006	1.30142	1.30278	1.30959	1.32330
0.5	1.000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.6	0.704	0.70330	0.70260	0.70190	0.70120	0.70050	0.69670	0.68997
0.7	0.432	0.43118	0.43035	0.42953	0.42870	0.42788	0.42375	0.41549
0.8	0.208	0.20743	0.20687	0.20630	0.20573	0.20516	0.20232	0.19664
0.9	0.056	0.05581	0.05561	0.05542	0.05522	0.05503	0.05407	0.05213
1	0	0	0	0	0	0	0	0

**Таблица 2.3.** Относителни стойности на напречното преместване по дължината на крайния елемент вследствие единично завъртане в началния му възел при различни стойности на еластичната константа на средата

a.L	k=0	k=68	k=136	k=204	k=272	k=340	k=680	k=1360
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.648	0.64984	0.65169	0.6535	0.65538	0.65722	0.66647	0.68505
0.2	1.024	1.02613	1.02825	1.03038	1.03250	1.03463	1.04528	1.06664
0.3	1.176	1.17757	1.17914	1.18070	1.18227	1.18384	1.19169	1.20740
0.4	1.152	1.15273	1.15347	1.15420	1.15493	1.15567	1.15933	1.16666
0.5	1.000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.6	0.768	0.76756	0.76713	0.76670	0.76626	0.76582	0.76365	0.75933
0.7	0.504	0.50347	0.50293	0.50240	0.50187	0.50133	0.49868	0.49338
0.8	0.256	0.25562	0.25524	0.25487	0.25450	0.25411	0.25223	0.24849
0.9	0.072	0.071870	0.07174	0.07161	0.07148	0.07135	0.07069	0.06940
1	0	0	0	0	0	0	0	0



**Фиг. 2.5.** Сравнение на графиките на първата функция на формата при хиперболо-тригонометрична и при полиномна апроксимация



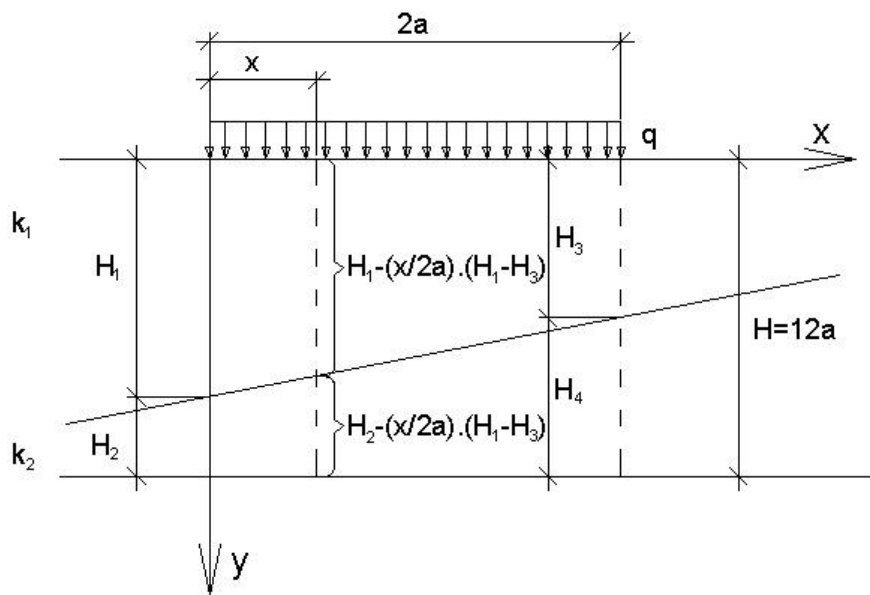
**Фиг. 2.6.** Сравнение на графиките на втората функция на формата при хиперболо-тригонометрична и при полиномна апроксимация

*Анализът на резултатите дадени на фигури от фиг. 2.3 до фиг. 2.6 показва, че при хиперболо-тригонометрична апроксимация функциите на формата са по-изпъкнали в половината на участъка, контактуващ с възела в който е наложено кинематичното въздействие. С увеличаване на константата на средата се наблюдава засилване на този ефект. С други думи при хиперболо-тригонометрична апроксимация имаме по-бързо затихване на кинематичното въздействие с отдалечаване от приложената му точка в сравнение със случая на полиномна апроксимация. От друга страна влиянието на въздействието в близкия край е по-силно изразено. Това се явява и причината при двата вида апроксимация и малък брой крайни елементи при дискретизиране да се получават различни резултати. Очевидно е, че хиперболо-тригонометричната апроксимация описва много по-добре действителното поведение на гредата на еластична основа.*



## 2.2. Изчисляване на винклеровата константа при многопластова среда. Предложение за модификация на модела на Винклер.

От земната механика знаем, че бихме могли да пренебрегнем включване в модела на земните пластове под определена гранична дълбочина приемайки, че след тази дълбочина те на практика са недеформируеми. Нека означим тази дълбочина с  $H$  и приемем, че в границите и имаме два косо заложене земни пласта с различни физични характеристики и константи  $k_1$  и  $k_2$  (фиг.2.7).



фиг. 2.7

Ще направим следното предложение за практическо определяне на средна стойност на винклеровата константа при такова косо залягане на пластове в условията на равнинната задача. В точка с произволна абсциса  $x$  по дължина на гредата в рамките на ивицата с ширина  $l$ , в съответствие с фиг. 2.7 ще имаме:

$$\begin{aligned}
 k(x) &= \frac{k_1}{H} \left( H_1 - \frac{x}{2a} (H_1 - H_3) \right) + \frac{k_2}{H} \left( H_2 + \frac{x}{2a} (H_1 - H_3) \right) = \\
 &= \frac{k_1}{H} \left( H_1 - \frac{x}{2a} (H_1 - H_3) \right) + \frac{k_2}{H} \left( H - H_1 + \frac{x}{2a} (H_1 - H_3) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Приложението на формула (2.19) е демонстрирано на базата на един числов пример (фиг. 2.8).

Дълбочина на затихване е 60m. Методиката е приложена при следните 4 съчетания на геометрични и физични характеристики:

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$I = \frac{0,4 \cdot 0,5^3}{12} = 4,17 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

$$k_{01} = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$$

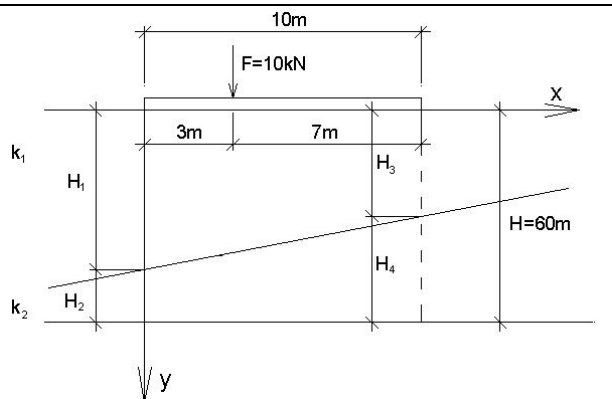
$$k_{02} = 10 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$$

$$k_1 = k_{01} \cdot b = 5 \cdot 10^4 \cdot 0,4 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$k_2 = k_{02} \cdot b = 10 \cdot 10^4 \cdot 0,4 = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{2,5 \cdot 10^4}{4,8 \cdot 10^4}} = \sqrt[4]{0,078125} = 0,5287$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 10^4}{4,8 \cdot 10^4}} = \sqrt[4]{0,15625} = 0,6287$$



Фиг.2.8

1сл.:  $H_1 = 60\text{m}$   $H_2 = 0\text{m}$   $H_3 = 60\text{m}$   $H_4 = 0\text{m}$   $k_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$   $k_2 = 0 \text{ kN/m}^2$

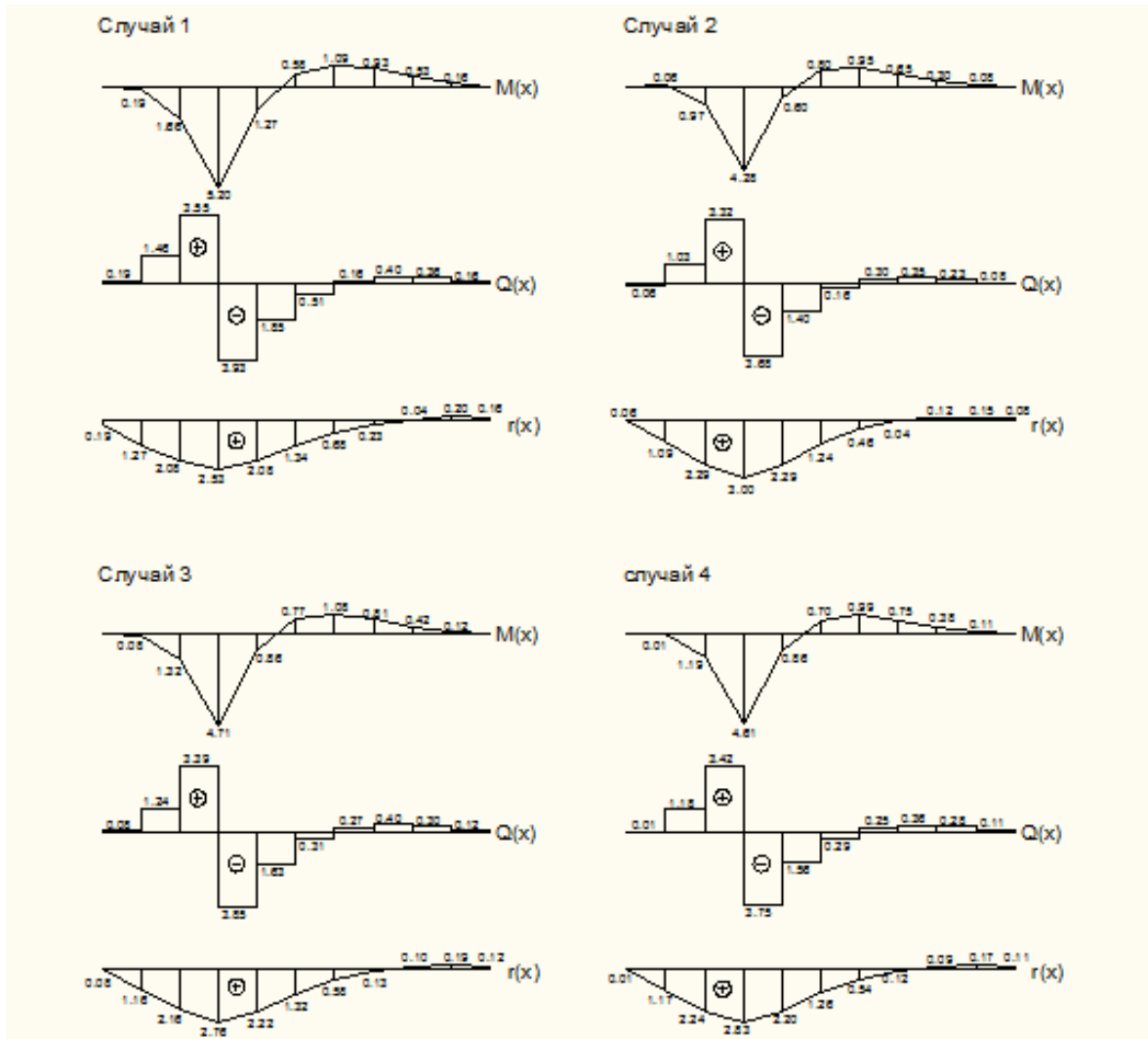
2сл.:  $H_1 = 0\text{m}$   $H_2 = 60\text{m}$   $H_3 = 0\text{m}$   $H_4 = 60\text{m}$   $k_1 = 0 \text{ kN/m}^2$   $k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$

3сл.:  $H_1 = 40\text{m}$   $H_2 = 20\text{m}$   $H_3 = 20\text{m}$   $H_4 = 40\text{m}$   $k_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$   $k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$

4сл.:  $H_1 = 20\text{m}$   $H_2 = 40\text{m}$   $H_3 = 40\text{m}$   $H_4 = 20\text{m}$   $k_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$   $k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$

Резултатите могат да се видят на фиг. 2.9.

Анализирайки резултатите забелязваме, че при хомогенна среда и увеличаване на стойността на винклеровата константа се наблюдава значително намаляване на стойностите на огъващите моменти в зоната на приложение на товара. Процентната разлика между двата случая 1 и 2 е от порядъка 20-50%. За зоната отдалечена от товара се наблюдава подобна тенденция, която изразена в проценти е от същия порядък. При косо разположение на пластове - случаи 3 и 4, както се вижда от фиг.5 максималната ордината на М диаграмата и в двата случая се намира между стойностите получени при хомогенна среда – случаи 1 и 2, като разликата между тези ординати е в рамките на 5-15%. В отдалечения от товара край тези разлики са по-слабо изразени. Интерес буди също разпределението на опорната реакция. При отслабване на средата максималната стойност на реакцията под приложението товар намалява. При косо разположение на пластове максималните стойности на реакцията на средата отново попадат в интервала на максималните стойности при хомогенна среда (случаи 1 и 2). Подобни констатации могат да се направят и от сравнение на Q диаграмите за четирите разглеждани случая.



Фиг. 2.9.

От казаното до тук можем да направим извод, че различното разпределение на земната реакция води до съществени изменения в разпределението на стойностите на разрезните усилия. Това показва, че отчитането на линейния характер на разпределение на винклеровата константа води до изменение на напрегнатото и деформираното състояние на системата конструкция – земна основа, в сравнение със същото при постоянна винклерова константа.

Ще направим и още едно предложение за модифициране на винклеровия модел, базирано на решението на **Егоров** за разпределение на земната реакция под корав ивичен фундамент. Предлаганата модификация на винклеровия модел се състои в следното: Да отчетем различната разпределителна способност, чрез коефициент на леглото по модела на Винклер, но последният да се изменя по дължина на гредата, като изменението е подчинено на формулата:

$$k(x) = \frac{1 + a_2 \left(\frac{x}{b_1}\right)^2 + a_4 \left(\frac{x}{b_1}\right)^4}{B \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b_1}\right)^2}} k, \quad (2.34)$$

където:

$k$  - средна стойност на коефициента на леглото, определен по някой от общоприетите методи.

Предлагания модел може много лесно да се реализира в МКЕ. Опит да се отчете по голямата коравина на земната основа под краищата на гредата е правен и чрез въвеждане на допълнителни пружинни връзки под тях. В по-стари литературни източници без съответната обосновка се препоръчва двойно завишаване на коравината под крайните точки в сравнение с тази под вътрешните. В [44] **Казаков** прави предложение за завишаване на коравината по краищата, като изхожда от двупараметричния модел на **Власов-Леонтиев**. Последната известна идея (поне доколкото автора е запознат) идва от **Kerr** [151].

### 2.3. Изследване размерите на близката зона

В настоящата работа се предлага едно по-тясно тълкуване на понятията “близка” и “далечна” зона. Тук под “далечна” зона разбираме зоната в която напреженията затихват до пренебрежими от практическа гледна точка стойности при статично въздействие. Първо ще се спрем върху изменението на напреженията в дълбочина на земния масив. За целта ще използваме решението на задачата на **Flamant**. Последното може да се намери в специализираната литература. Тук ще използваме решението дадено в [22]. Означенията са както на фиг. 2.13:

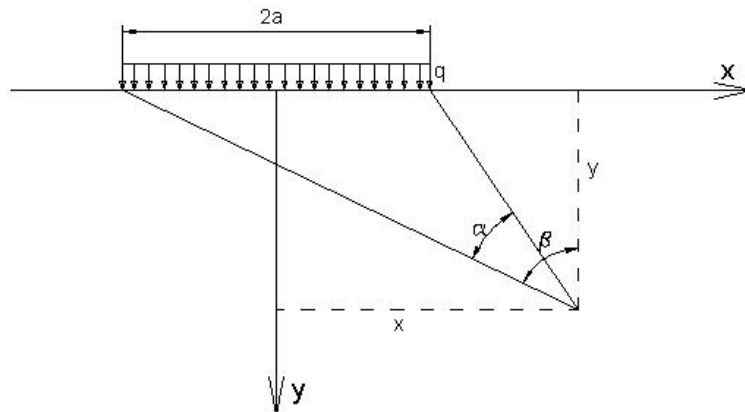
$$\sigma_x = -\frac{q}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} + y \left[ \frac{x-a}{y^2 + (x-a)^2} - \frac{x+a}{y^2 + (x+a)^2} \right] \right\} \quad (2.35)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} - y \left[ \frac{x-a}{y^2 + (x-a)^2} - \frac{x+a}{y^2 + (x+a)^2} \right] \right\} \quad (2.36)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{\pi} y^2 \left[ \frac{1}{y^2 + (x+a)^2} - \frac{1}{y^2 + (x-a)^2} \right] \quad (2.37)$$

За  $x = 0$  имаме:

$$\sigma_y = -\frac{q}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{a}{y} - \operatorname{arctg} \left( \frac{-a}{y} \right) - y \left[ \frac{-a}{y^2 + (-a)^2} - \frac{a}{y^2 + (a)^2} \right] \right\}. \quad (2.38)$$



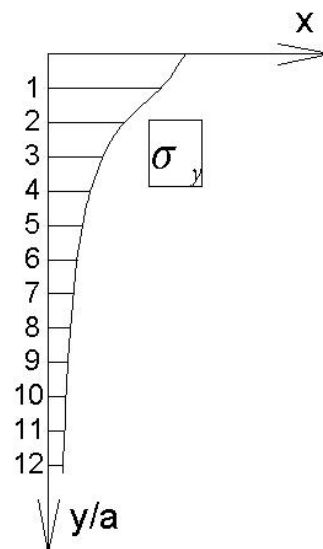
Фиг. 2.13.

Като критерий за “пренебрежима” стойност приемаме условието:  $\sigma_y \leq 0,1q$ , където  $q$  е интензивността на равномерно разпределения по горната повърхност на полуравнината товар. Дълбочината на затихване ще изразим чрез полуразмера  $a$  на печата на натоварването.

Възползвайки се от формул (2.38) е построена графика на изменение на напреженията в дълбочина в центъра на товарния печат (фиг. 2.14). Избрана е стъпка на нарастване на дълбочината  $0,1a$ . От таблицата и графиката ясно се вижда, че първоначално заложения критерий е изпълнен при оносителна дълбочина:  $y/a \geq 12$ . Това ни дава основание да направим извода, че можем да пренебрегнем земните пластове намиращи се под тази дълбочина. С други думи според приетият от нас критерий близката зона се простира в дълбочина до  $y/a = 12$ .

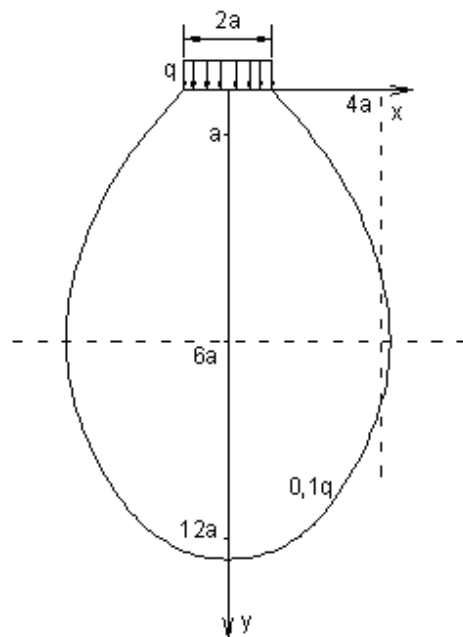
$y/a$	$\sigma_y = k.q$
0	1,0000
1	0,8183
2	0,5498
3	0,3958
4	0,3058
5	0,2481
6	0,2084
7	0,1795
8	0,1575
9	0,1403
10	0,1205
11	0,1151
12	0,1056

Табл.2.5



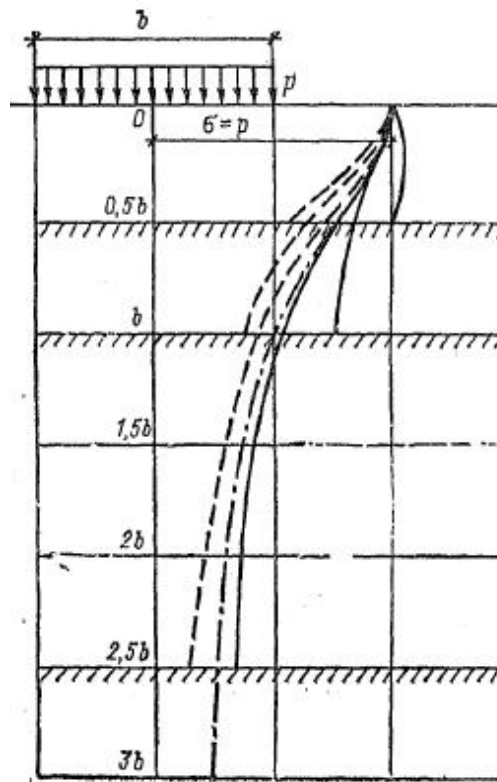
Фиг. 2.14

Изменението на напреженията в хоризонтална и вертикална посока е отразено в табл. 2.6., където ясно се вижда границата при която  $\sigma_y$  напреженията изпълняват условието  $\sigma_y \leq 0,1q$ . В хоризонтална посока тази граница е  $x/a \geq 4$ . Още по-добре това се вижда на представената графика (фиг. 2.15). Тази гранична стойност в хоризонтално направление се реализира при дълбочина  $y/a = 6$ . От всичко казано до момента излиза, че по подбрания от нас критерий „близката“ зона може да се опише с правоъгълник с размери:  $x = 8a$  и  $y = 12a$ .



Фиг. 2.15

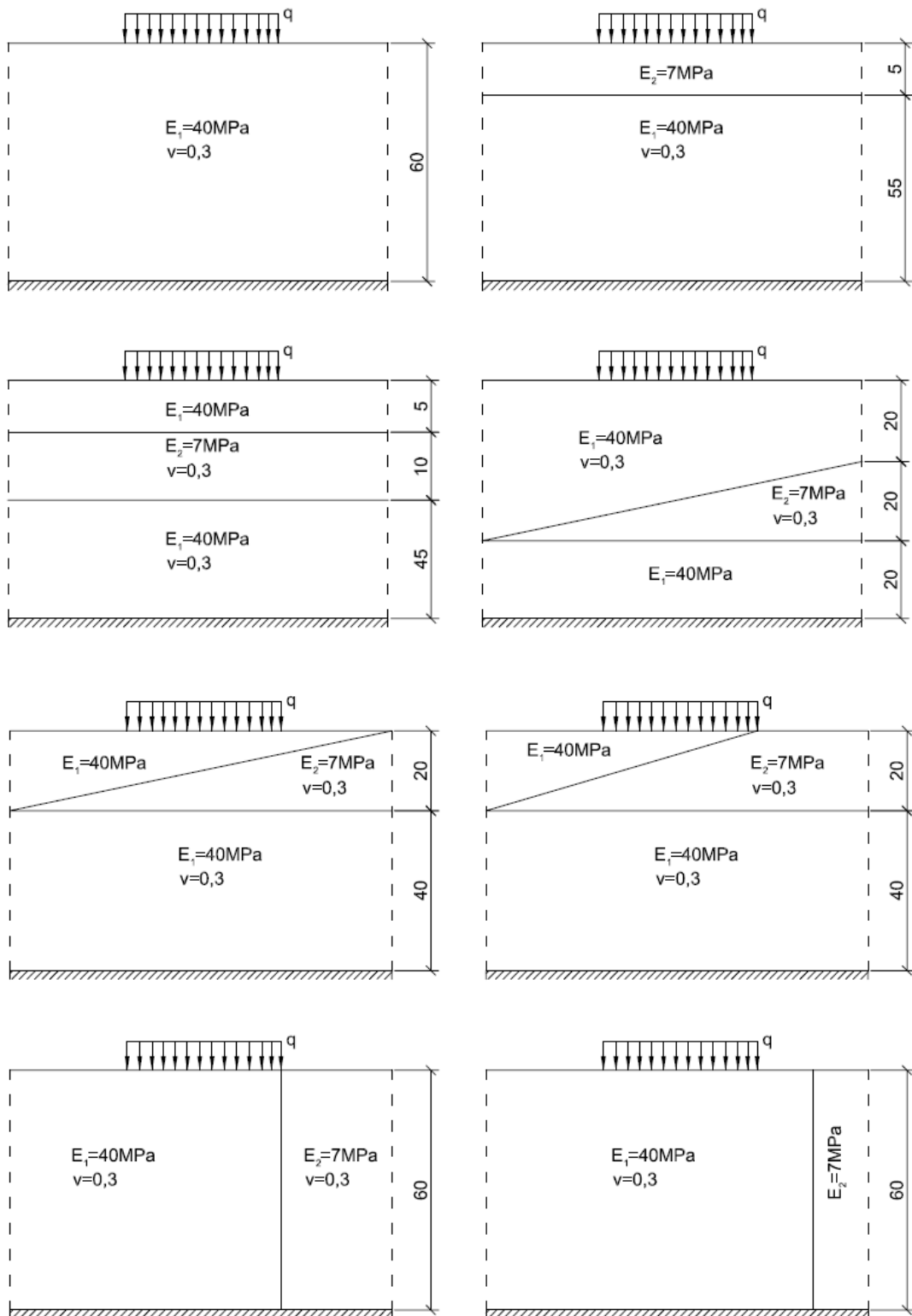
Когато земната основа е изградена от два или повече пласта с рязко отличаващи се помежду си характеристики, това трябва да се отчете при определяне на напреженията и деформациите. Изследванията на **Шехтер, Егоров, Горбунов-Посадов** и др. показват, че при наличие на два слоя, при което долният слой може да се приеме за практически неслегаем, се наблюдава известна концентрация на  $\sigma_z$  напреженията под центъра на товарния печат. Тази концентрация е по-значителна при намаляване на дебелината на горния деформируем слой (плътните линии на фиг. 2.17). В случай, че долният слой е значително по-деформируем от горния се наблюдава обратната тенденция на разсейване на напреженията и намаляването им под центъра на натоварването (прекъснатите линии на фиг. 2.17). За сравнение на фиг. 2.17 са показани и напреженията  $\sigma_z$  в идеално еластично полупространство (означени с прекъснатата линия с точка).



фиг. 2.17

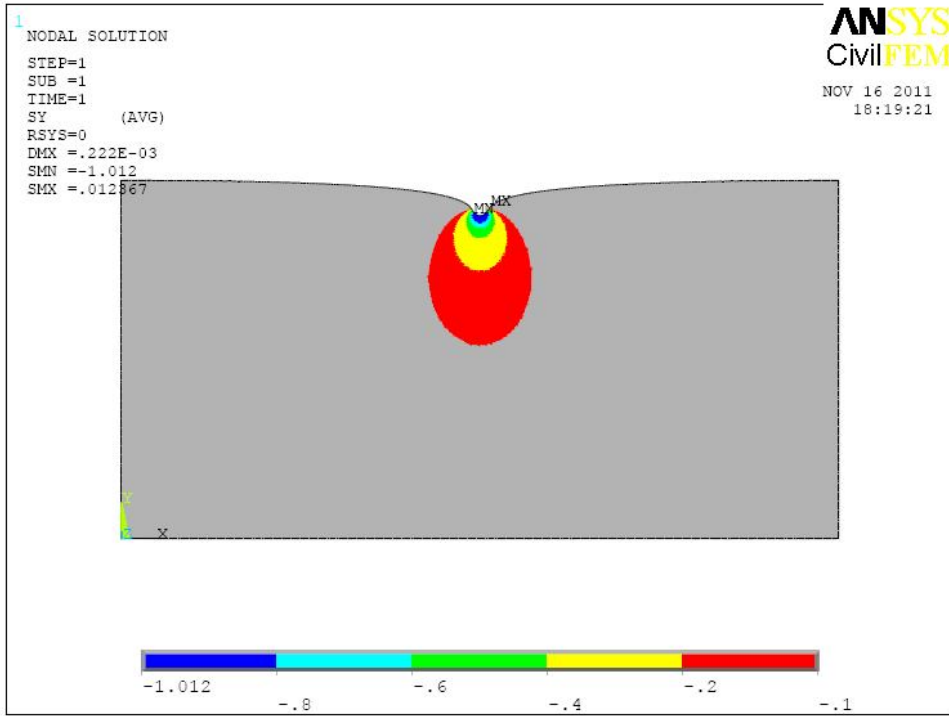
Изследвания върху двуслойна земна основа са правени от **Маргер**, **Егоров**, **Раппорт** и др. Разглеждайки решение за двуслойна основа, натоварена със съсредоточена сила (както за пространствената, така и за равнинната задача) **Маргер** достига до извода, че пренебрегването на триенето между двата слоя не оказва съществено влияние върху разпределението на напреженията в масива. **Егоров** разглежда същата задача, но при ивично равномерно разпределено натоварване. Резултатите, които той представя водят до извода, че когато горният пласт е значително по-корав и неговата мощност е повече от  $1/4$  от ширината на товарната ивица, тогава резултатите се различават значително от тези, получени за еднородна основа. В останалите случаи неотчитането на нееднородността на основата не е съществено. В работите на **Раппорт** се разглежда равнинната и пространствената задача за съсредоточен и равномерно разпределен ивичен товар, както и за равномерно разпределен товар върху площ с формата на кръг. Той показва, че силите на триене в контакта между двата слоя имат съществено влияние върху разпределението на напреженията. Така, например неотчитането на силите на триене води до разлики от до 22% при  $\sigma_z$  напреженията. За останалите напрежения според **Раппорт**, разликата е още по-съществена.

За илюстрация на казаното по-горе за нееднородна среда са разгледани няколко модела, решени на **Ansys**. Моделите са представени на фигура 2.18 На фиг.2.19-2.26 са представени графични резултати за разпределението на  $\sigma_z$  напреженията.

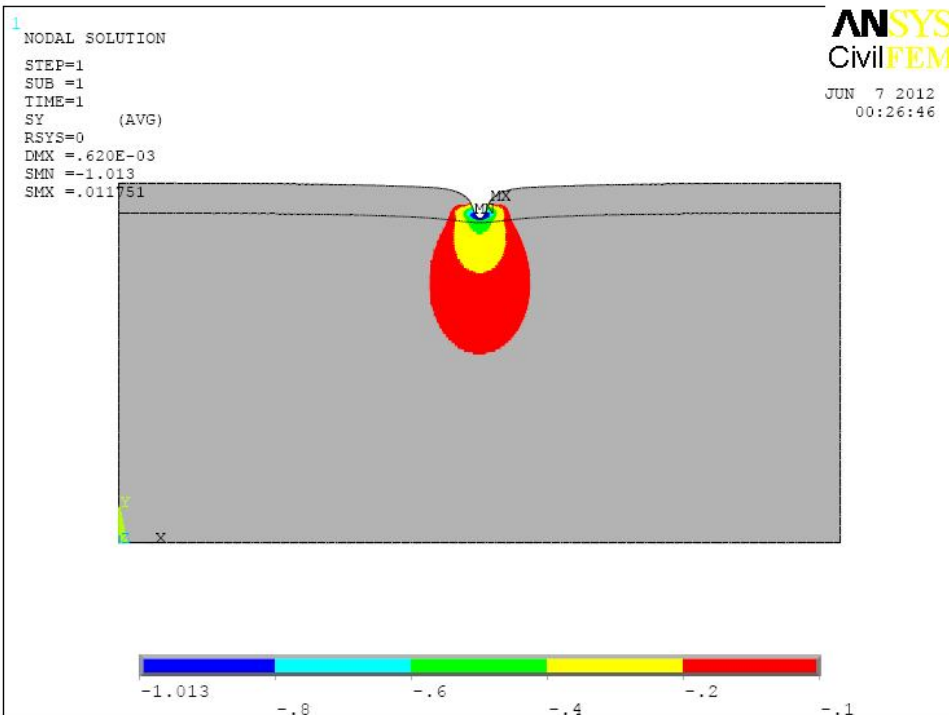


**Фиг.2.18**

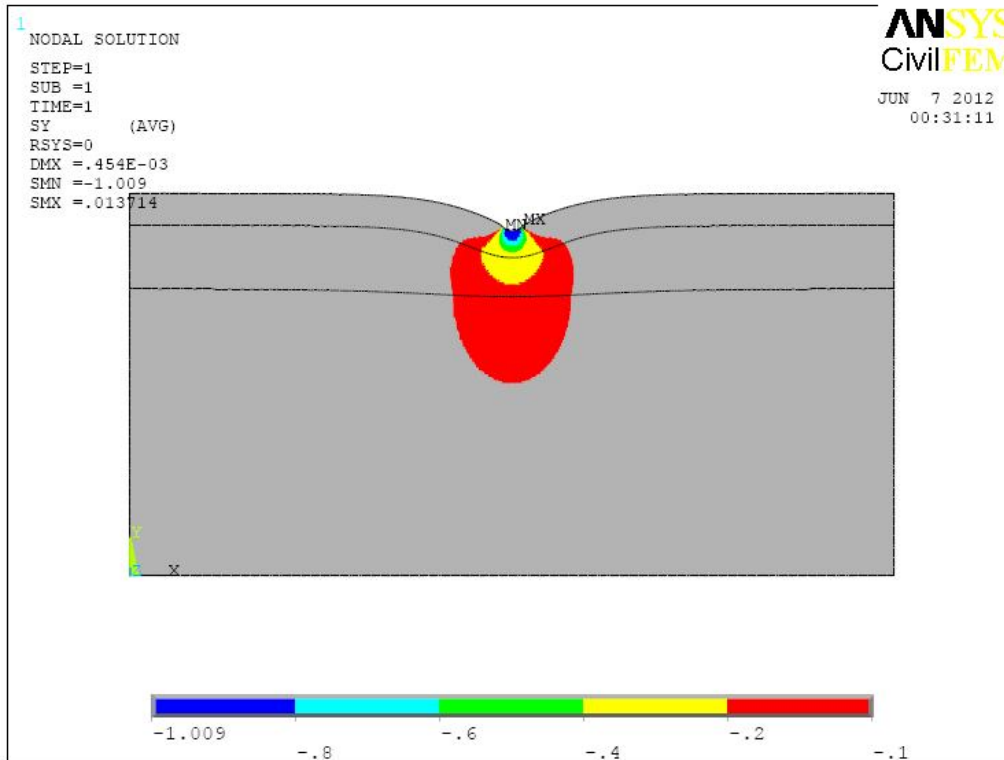




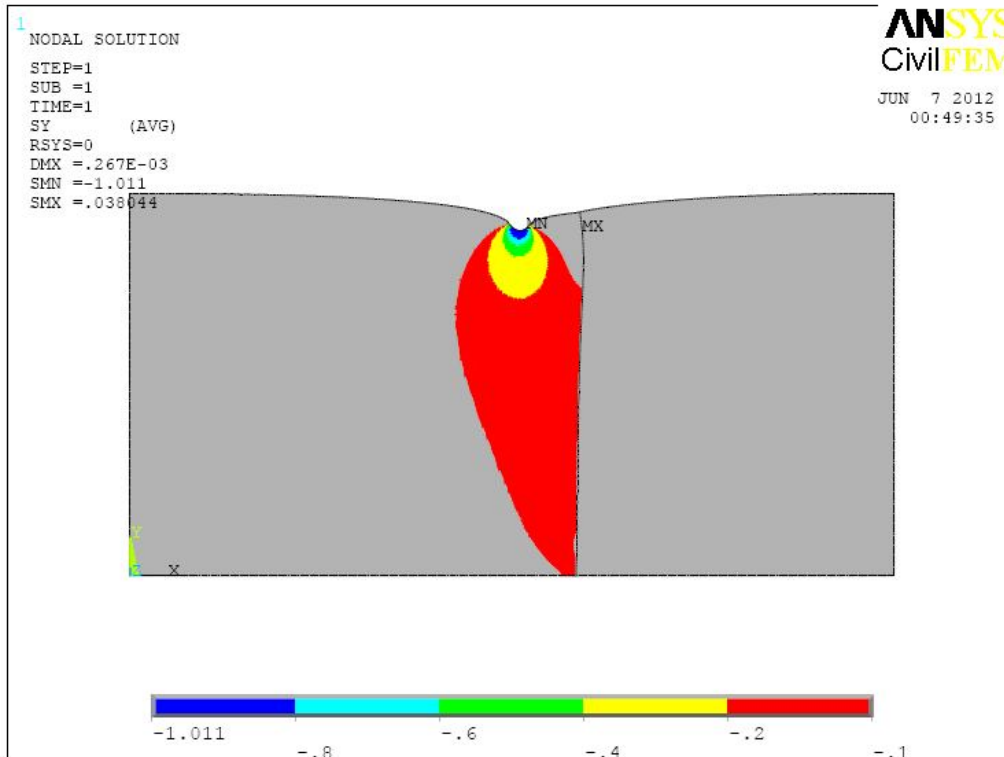
Фиг. 2.19



Фиг. 2.20



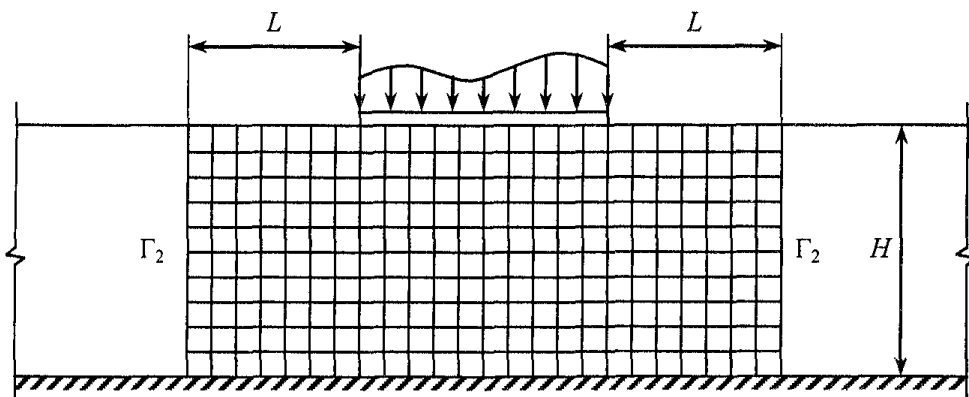
Фиг. 2.21



Фиг. 2.26

От представените графики ясно се вижда колко значително е влиянието върху разпределението на напреженията наличието на значително по-слаб пласт в земния масив.

Логично съвместната работа на фундамента и земната основа се постига чрез разработването на единен модел с помощта на МКЕ. В този случай основата може да се моделира като някаква крайна област разбита на мрежа от крайни елементи. Остава въпросът какви да бъдат размерите на тази крайна област. Отговорът най-общо гласи, че трябва да са такива, че краевите ефекти от тези граници да не оказват практическо влияние върху напрегнатото и деформирано състояние в контактната плоскост. Обикновено границите се приемат така: в страни от фундамента на разстояние 3-4 пъти неговият размер но не повече от 1-1,5 пъти дебелината на деформируемия пласт. Когато няма реална неслегаема основа за еквивалентна дебелината на деформируемия пласт може да се приеме активната зона пресметната в съответствие с Нормите [61]. Границите в страни от фундамента се приемат така, че да превишават размера му със същото разстояние. Или по-общо изхождайки от основното емпирично правило основаващо се на принципа на **Сен-Венан**, трябва да изберем  $L = H \div 1,5H$  (фиг. 2.24)



Фиг. 2.24

Вместо активната зона определена според нормите за целта може да се използва и тази определена по метода на еквивалентния слой, предложен от **Цыгович**. Същността на метода се състои в следното: натовареният на повърхността си земния масив представен като еластичното полупространство се заменя с еквивалентен слой с мощност  $h_e$  така, че вертикалните деформациите по двата модела да са равни. По отношение на използваните теоретични предпоставки методът заема междинно място между строго аналитичните методи и метода на послойното сумиране.

Активната зона определена по метода на еквивалентния слой е:

$$H_a = 2h_e. \quad (2.46)$$

Базирайки се на нормативния метод за определяне на активната зона, **В. Минков** дава кубично уравнение за директно определяне на  $H_a$  в случай на еднороден пласт с голяма мощност.

*Авторът смята, че граничните стойности  $x=4a$  и  $y=12a$ , могат да се ползват за граници на крайната област при дискретизация с МКЕ. Освен това за разлика от активната зона те зависят само от размерите на фундамента и се определят лесно.*

Другия проблем пред който се изправяме при прилагането на МКЕ в равнинната задача е наличието на различни по тип и размерност крайни елементи. Само в редки случаи една конструкция може да се дискретизира с един и същи тип крайни елементи. Значително по-чести са случаите в които в дискретизацията участват разнотипни елементи с различна размерност. Някои препоръки относно използването на крайни елементи с различна размерност могат да се видят в [45] и [65]. В случая на дискретизация на греда върху еластичен слой с ограничена мощност дискретизацията може да се извършва с комбиниране на едномерни гредови и двумерни равнинни крайни елементи.

#### **2.4. Методи за определяне на винклеровата константа в някои програмни системи.**

Методите за определяне на параметрите на средата от винклеров или пастернаков тип са твърде много; броят им граничи с броя на изследователите. За еднородна в план многослойна земна основа, състояща се от линейно деформируеми и с постоянна дебелина пластове, параметърите на средата могат да бъдат определени по методите предложени от **Горбунов-Посадов, Пастернак, Власов**. Ще разгледаме някои от методите за определяне на тези параметри използвани в различни програмни продукти реализирани на база на МКЕ.

В програмата SCAD са предвидени два режима за определянето им: по модела на Пастернак и по модела на слоещото полупространство. Разликата между определените по двата метода параметри могат да се различават съществено. Така за разгледания пример, първия параметър по метод 1 е 1,5 пъти по-голям от този по метод 2, а втория е с 1,23 пъти по-голям. Тази значителна разлика неминуемо води и до съществена разлика в разрезните усилия на горната конструкция.

За определяне на винклеровата константа при линейно деформируема многослойна земна основа в Civil FEM се изхожда от решението на **Boussinesq**. Понеже имаме работа с многослойна среда се работи с приведени стойности на  $E$  и  $\nu$  получени от изразите на **Theo de Barros**.

В програмната система “ЛИРА” са реализирани също два подхода за определяне на параметрите  $C_1$  и  $C_2$ . Първия подход се базира на хомогенизиране на земния масив, чрез въвеждане на еквивалентни стойности на деформационния модул и коефициента на **Поасон**. В основата на вторият подход лежи познатата формула, изразяваща физическия смисъл на винклеровия коефициент, като обаче се отчита нелинейното поведение на основата.

## Глава 3

### 3.1. Устойчивост на греда на еластична основа (прът в еластична среда) изследвана по МКЕ и хиперболо-тригонометрична апроксимация на функциите на формата.

Както вече бе споменато в Глава 1, най-естественото приложение на модела “прът в еластична среда” е единичният пилот. Еластичната основа от своя страна може да се моделира по различен начин. Най-простият модел на еластичната среда е винклеровия. Именно на това се дължи неговото широко приложение, въпреки очевидните му недостатъци. Аналитичното определяне на критичния параметър на натисково натоварване за прът в еластична среда се разглежда в повечето класически курсове по *Устойчивост на еластичните системи*. Такова решение, може да се види например в [23]. В цитираните източници се разглежда решение на греда свободно подпряна в двата си края лежаща изцяло върху винклерова основа. Получаването на аналитично решение за по-сложни случаи на подпирание и най-вече за различно разпределение на реакцията на средата е трудно, а в голяма част от случаите - невъзможно. Това налага използването на числени методи. Като един от най-популярните и широко използвани методи през последните години се наложи методът на крайните елементи (МКЕ). Това се дължи на факта, че сравнително лесно се реализира неговото програмиране. Традиционно приложение на МКЕ за пресмятане на критичен параметър на натоварване при отсъствие на еластична среда може да се види в [6].

Намирането на критична сила се свежда до търсене и намиране на собствените стойности, което води до търсене корените на уравнението:

$$\det[[K] - [K_G]] = 0, \quad (3.1)$$

където:

$[K]$  е глобална матрица на коравина, получена посредством адресиране на съответните елементни матрици  $[k_e]$ , а

$[K_G]$  е глобална матрица на геометрична коравина, получена чрез адресиране на съответните елементни геометрични матрици  $[k_{Ge}]$ .

На уравнение (3.1) може да се гледа по следния начин: критичния параметър е онази стойност на приложената натискова сила, за която общата коравина на конструкцията става нулева. Както вече бе споменато намирането на критичния параметър е свързано със задачата за намиране на собствени числа и собствени форми на системата. Повече подробности във връзка с математическия аспект на проблема могат да се видят в съответната литература [14], [63], [81], [102] и др.

Очевидно, формата на загуба на устойчивост на отделния прътов краен елемент се описва от трансцеденти функции, които могат да се апроксимират само приблизително. По този начин решението по МКЕ е натоварено с грешка зависеща от избора на апроксимираща функция, както и от степента на дискретизиране на разглежданата система. Наличието на еластична среда води до още по-голяма чувствителност на

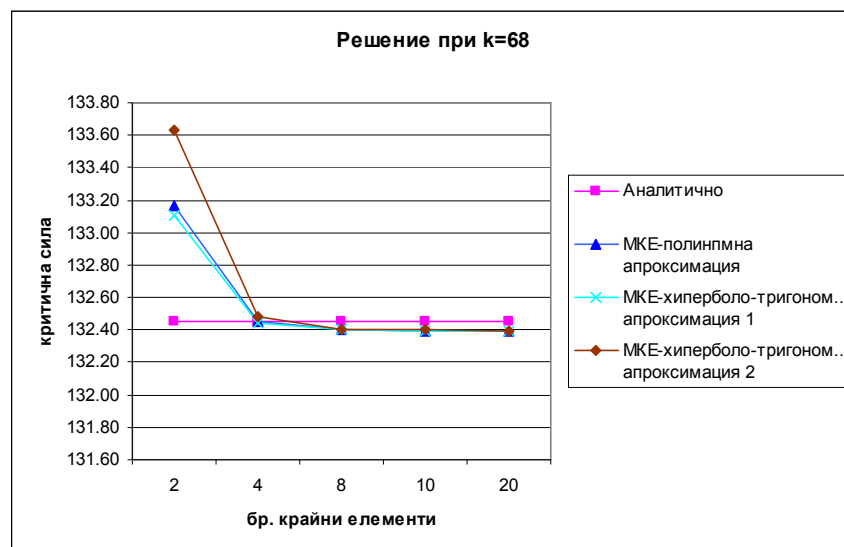
решението към избора на апроксимираща функция и броя на крайните елементи при дискретизация. Значително подобрене в това отношение бихме могли да внесем, ако използваме за апроксимираща функция комбинация от хиперболо-тригонометрични функции (функциите на Крилов), както вече бе отбелязано в **Глава 2**.

Геометричната матрица при хиперболо-тригонометричната апроксимация ще се пресметне на база на добре познатата зависимост:

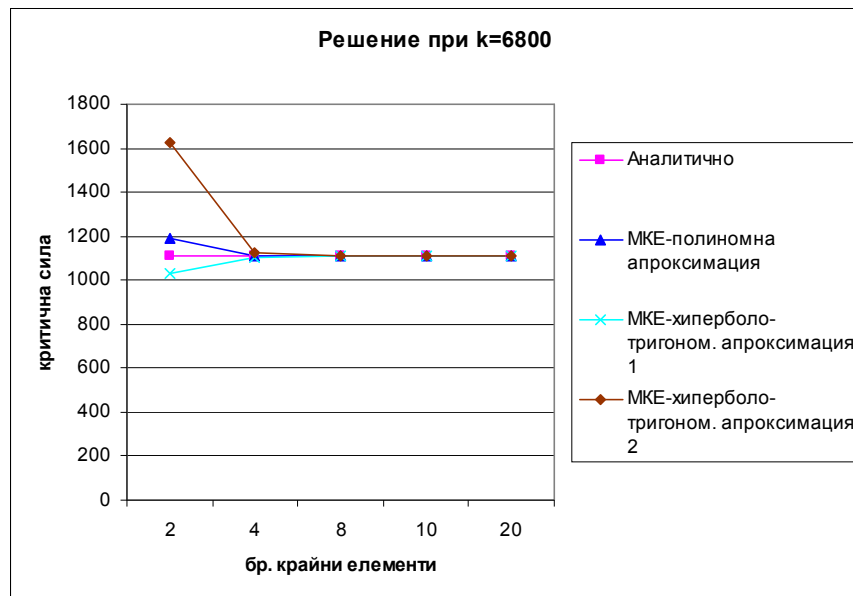
$$[k_{Ge}] = \int_0^l [\Phi']^T [\Phi'] dx, \quad (3.5)$$

където с  $\Phi'$  е означена първата производна на функцията на формата. Точния вид на тези функции за разглежданата апроксимация може да се види в [122] и [123].

*В настоящият труд се демонстрира използването на гредови краен елемент, с хиперболо-тригонометрични функции на формата за изследване на устойчивостта на гредови елементи на еластична основа или в еластична среда. За целта е използвана авторска програма написана на MATLAB. Резултатите от изследването са сравнени с тези получени при полиномната апроксимация и при аналитично решение. Разглеждат се два случая при хиперболо-тригонометрични функции на формата: с матрица на геометричната коравина съответна на полиномна апроксимация и с такава съгласувана с хиперболо-тригонометричните функции на формата.*



Фиг. 3.2



**Фиг. 3.16**

*От представените таблично и графично резултати ясно се вижда, че при определена стъпка на дискретизация разликата между критичната сила, получена по аналитичен начин и по МКЕ и в трите случая на апроксимация (полиномна и двата случая на хиперболо-тригонометрична) става незначителна. При дискретизация на гредата само с 2 крайни елемента обаче картината е различна: при хиперболо-тригонометрична апроксимация с несъгласувана матрица на формата максималната разлика със съответното аналитичното решение е 13,9%, докато при същата апроксимация и съгласувана матрица на формата тази разлика е 46,6%. Интересен факт който се наблюдава е, че при определена стойност на винклеровата константа получената по МКЕ с хиперболотригонометрична апроксимация и несъгласувана геометрична матрица, критична сила е по-малка от получената по аналитичен метод. Този факт може да се обясни с различния начин на деформиране на крайния елемент при различните функции на формата (виж. Глава 2). Фактът, че в редица случаи още при първо приближение критичната сила получена по МКЕ с хиперболо-тригонометрични функции на формата и несъгласувана матрица на геометрична коравина е по-малка от аналитичната, говори че освен по-точен в сравнение с класическата форма на МКЕ предлагания подход е и в полза на сигурността.*

*Направения до тук анализ ни води до заключението, че използването на хиперболо-тригонометрични функции на формата в комбинация с полиномна геометрична матрица на коравина за изследването на греда на еластична основа е един разумен компромис. Още повече, че в този случай се получават по-консервативни стойности, което е в полза на сигурността.*

### 3.2. Проверка влиянието на удължаването, дължащо се на реакцията на средата върху критичната сила.

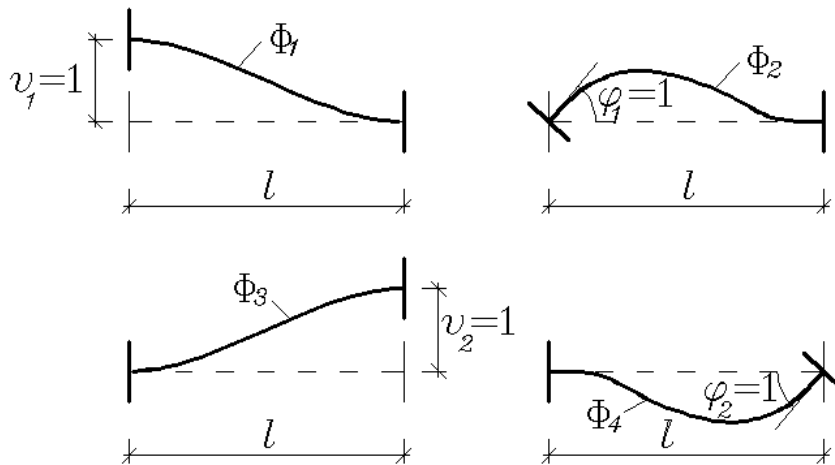
В настоящият параграф се прави опит за отчитане влиянието на отпора на еластичната среда върху критичния параметър. Това влияние явно ще се изрази в редукция на геометричната матрица на коравина.

Такава възможност за редукция на  $[k_{Ge}]$ , произтича органично от начина за нейното формиране:

$$[k_{Ge}] = \int_0^l [\Phi']^T [\Phi'] dx, \quad (3.23)$$

където  $[\Phi']$  съдържа първите производни на компонентите на функцията на формата  $[\Phi]$ , дадени тук като зависимости (3.24), съответни на “еластичните линии” на оста на пръта, при единични възлови премествания и завъртвания – *фиг. 3.17*

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right), & \Phi_2 &= \left( x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right), \\ \Phi_3 &= \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right), & \Phi_4 &= \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$



**Фиг.3.17**

Тези единични състояния ще предизвикват разпределени реактивни натоварвания по дължина на пръта от вида:



$$\begin{aligned}
q_1(x) &= -k\Phi_1 = -k\left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right), \\
q_2(x) &= -k\Phi_2 = -k\left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right), \\
q_3(x) &= -k\Phi_3 = -k\left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right), \\
q_4(x) &= -k\Phi_4 = -k\left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

От добре познатата зависимост

$$v_i^{IV}(x) = -\frac{q_i(x)}{EI}, \tag{3.26}$$

можем да намерим функциите  $v_i(x)$  на напречните премествания на пръта, от натоварване  $q_i(x)$ , а от там – и техните първи производни  $v_i'(x)$ . В такъв случай редукцията на скъсяването на пръта, т.е. на матрицата  $[k_{Ge}]$  ще се пресмята като

$$[k_{Ge}]^r = \int_0^l [v']^T [v'] dx \tag{3.27}$$

След четирикратно интегриране на (3.36) в съответствие с формите от *фиг.3.17*. получаваме:

$$EIv_1'(x) = -k\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{20l^2} + \frac{x^6}{60l^3} - \frac{13l}{70}x^2 + \frac{11l^2}{210}x\right). \tag{3.38}$$

$$EIv_2'(x) = -k\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{30l} + \frac{x^6}{120l^2} - \frac{11l^2}{420}x^2 + \frac{l^3}{105}x\right) \tag{3.39}$$

$$EIv_3'(x) = -k\left(\frac{x^5}{20l^2} - \frac{x^6}{60l^3} - \frac{9l}{140}x^2 + \frac{13l^2}{420}x\right) \tag{3.40}$$

$$EIv_4'(x) = -k\left(-\frac{x^5}{60l} + \frac{x^6}{120l^2} + \frac{13l^2}{840}x^2 - \frac{l^3}{140}x\right) \tag{3.41}$$

Реализацията на (3.27) се осъществява с помощта на *Таблица 3.8*

След извършване на умножението по **Таблица 3.8** за първия израз получаваме:

$$v_1'(x).v_1'(x) = \left(\frac{k}{EI}\right)^2 \left( \frac{1}{3600} \frac{x^{12}}{l^6} - \frac{1}{600} \frac{x^{11}}{l^5} + \frac{1}{400} \frac{x^{10}}{l^4} + \frac{1}{180} \frac{x^9}{l^3} - \frac{4}{175} \frac{x^8}{l^2} + \right. \\ \left. + \frac{32}{1575} \frac{x^7}{l} + \frac{71}{3150} x^6 - \frac{13}{210} l x^5 + \frac{2291}{44100} l^2 x^4 - \frac{143}{7350} l^3 x^3 + \frac{121}{44100} l^4 x^2 \right) \quad (3.42)$$

**Таблица 3.8**

	$v_1'(x)$	$v_2'(x)$	$v_3'(x)$	$v_4'(x)$
$v_1'(x)$	$v_1'(x).v_1'(x)$	$v_1'(x).v_2'(x)$	$v_1'(x).v_3'(x)$	$v_1'(x).v_4'(x)$
$v_2'(x)$	$v_2'(x).v_1'(x)$	$v_2'(x).v_2'(x)$	$v_2'(x).v_3'(x)$	$v_2'(x).v_4'(x)$
$v_3'(x)$	$v_3'(x).v_1'(x)$	$v_3'(x).v_2'(x)$	$v_3'(x).v_3'(x)$	$v_3'(x).v_4'(x)$
$v_4'(x)$	$v_4'(x).v_1'(x)$	$v_4'(x).v_2'(x)$	$v_4'(x).v_3'(x)$	$v_4'(x).v_4'(x)$

Аналогични изрази се получават и за другите двойки произведения.  
След интегрирането окончателно получаваме редуционната матрица:

$$[k_e]^r = 10^{-3} \left(\frac{k}{EI}\right)^2 \begin{bmatrix} \frac{6407}{756756} l^7 & \frac{8249}{4540536} l^8 & \frac{6407}{756756} l^7 & \frac{-32069}{18162144} l^8 \\ \frac{8249}{4540536} l^8 & \frac{127}{324324} l^9 & \frac{32069}{18162144} l^8 & \frac{-37}{96096} l^9 \\ \frac{6407}{756756} l^7 & \frac{32069}{18162144} l^8 & \frac{6407}{756756} l^7 & \frac{-8249}{4540536} l^8 \\ \frac{-32069}{18162144} l^8 & \frac{-37}{96096} l^9 & \frac{-8249}{4540536} l^8 & \frac{127}{324324} l^9 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

**Числените експерименти доказват, че редуционната матрица при малки по размер крайни елементи не повлиява практически на стойността на критичната сила.**

### 3.3. Влияние на закона за разпределение на реакцията на средата върху критичната сила.

В настоящия параграф се разглежда влиянието на закона за разпределен на земната реакция по дължината на прът в еластична среда върху големината на критичната сила. Както вече бе споменато най-логичното приложение на модела “прът в еластична среда” е единичен пилот. При такъв модел постоянна по дължина на пилота реакция на средата е груба опростяваща предпоставка. Значително по-точен би бил модел при който реакцията на средата нараства в дълбочина по някъкъв закон.

Много теоретични подходи са били използвани за определяне на стойността на хоризонтални реакция на земния масив. В настоящия труд са разгледани по известните от тях. По основно внимание е отделено на формулата предложена в [53], [55], [60], [68] и [78]. Рекцията на леглото в хоризонтално направление е перпендикулярна към външната повърхност на пилота и се изразява чрез формулата:

$$C_z = k.z, \quad (3.74)$$

където:

$C_z$  - коефициентът на леглото на дълбочина  $z$ ,  
 $z$  - дълбочината, мерена от земната повърхност,  
 $k$  - коефициент на пропорционалност.

Според [53] изчисленията, основани на предпоставката (3.74), ще дават добри резултати при подходящ избор на коефициент на пропорционалност. Там са дадени и подходящи стойности за  $k$  според вида на почвата.

Коефициента на леглото във вертикално направление под върха на пилота може да бъде определен по формулата:

$$C_o = \frac{5C}{d}, \quad (3.80)$$

където:

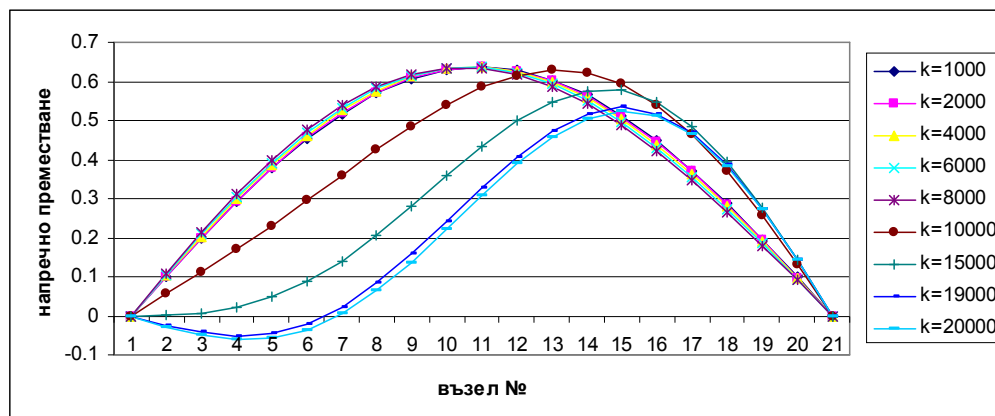
$d$  - диаметъра на пилота.  
 $C$  - коефициента на леглото под пилот с диаметър 5м.

*Проведено е параметрично изследване на прът в еластична среда от винклеров тип. Целта е да определим какво е влиянието на линейно изменящ се в дълбочина коефициент на Винклер върху критичната сила на централно натиснат прът в тази среда и да го сравним по отношение на същата, когато винклеровия коефициент е константа.*

*Параметричното изследване е проведено за 8 различни стойности на  $k$ . Изследването е проведено с помощта на SAP 2000, като пръта е моделиран с 20 на брой гредови крайни елемента. Константата на средата е моделирана като разпределени по дължината на крайният елемент пружинки.*

*Направена е съпоставка на изменението на критичната сила и напречното преместване. Оказа се, че при така проведеното параметрично изследване вертикалната пружинна константа приета по (3.80) не оказва съществено влияние върху критичната сила. На практика се получават същите стойности както при неподдаваема опора. Ето защо по нататък са дадени резултатите само за втория случай на подпиране.*

*На фиг. 3.18 е показано изменението на деформираната ос на пръта във функция от параметъра  $k$  при линейно разпределена реакция на средата. Нарастването на  $k$  е от възел №21 към възел №1.*



Фиг. 3.18

От представените таблично и графично резултати се вижда, че влиянието на начина на разпределение на реакцията влияе значително върху стойностите на критичната сила. Тази разлика може да достигне до 50% между случая на линейно разпределение и константна реакция  $2k$ . Вижда се също, че разликата става по-значителна при по-високи стойности на  $k$ , което е логично. Важен извод от направеното параметрично изследване е и фактът, че вертикалната податливост има сравнително малко влияние върху големината на критичната сила.

#### 3.4. Влияние на страничното триене върху критичната сила.

Ще разглежда влиянието на разпределен по дължината на прът в еластична среда товар върху големината на критичната сила. Както многократно вече повтъряме най-логичното приложение на модела “прът в еластична среда” е единичен пилот. При такъв модел постоянна по дължина на пилота осова сила е една доста груба опростяваща предпоставка, която е оправдана донякъде само в случая на значително къс и корав пилот, достигащ неподаваем скален пласт. В останалите случаи се наблюдава намаляване на осовата сила в дълбочина за сметка на страничното триене, което е значително при плаващите пилоти. Ефектът от намаляването на нормалната осова сила по дължината на пилота е изследвано от **Reddy** и **Valsangkar** (1970). Те приемат следния идеализиран модел на разпределение на осовата сила:

$$F = F_0 \left( 1 - \psi \frac{x}{l} \right), \quad (3.85)$$

или

$$F = F_0 \left( 1 - \psi \frac{x^2}{l^2} \right), \quad (3.86)$$

където:

$F_0$  - натоварването в главата на пилота,

$x$  - дълбочината, мерена от земната повърхност,

$l$  - дължината на пилота,

$\psi$  - параметър, приемащ стойности в интервала:  $0 \leq \psi \leq 1$ .

Граничните стойности се приемат, както следва:

- $\psi = 0$  за седящ пилот, достигащ здрав неслеглаем пласт,
- $\psi = 1$  за плаващ пилот в земен пласт без кохезия.

Формули (3.85) и (3.86) са в сила за пилоти с нисък ростверк. За такива с висок ростверк Reddy и Valsangkar предлагат следната зависимост:

$$F = F_0 \left[ 1 - \psi \left( \frac{x}{l} - n \right) \right], \quad (3.87)$$

където:

$F_0$  - натоварването в главата на пилота,

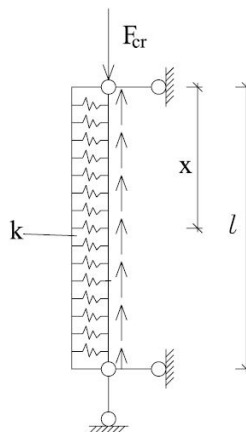
$x$  - дълбочина, мерена от върха на пилота,

$l$  - дължината на пилота,

$\psi$  - параметър, приемащ стойности в интервала:  $0 \leq \psi \leq 1$ ,

$n$  - отношение на дължините на частта от пилот над теренната повърхност към цялата му дължина.

В настоящата работа се провежда параметрично изследване на прът в еластична среда, ставно подпрян в двата си края (фиг. 3.22). Еластичната среда е от винклеров тип и параметърът на средата е приет постоянен по цялата дължина на пръта. Самият прът има следните характеристики:  $l = 2m$ , тръбно напречно сечение с външен диаметър  $b = 0,068m$  и огъвна коравина  $EI = 42,48kN.m^2$ .



Фиг. 3.22. Статическа схема на изследвания прът

Параметричното изследване е проведено за 15 различни константи на еластичната среда и 11 различни стойности на  $\psi$ . Разпределението на нормалната сила е прието по формула (3.85). Изследването е проведено с помощта на SAP 2000, като прътът е моделиран с 20 на брой гредови крайни елемента. Константата на средата е моделирана като разпределени по дължината на крайният елемент пружинки.

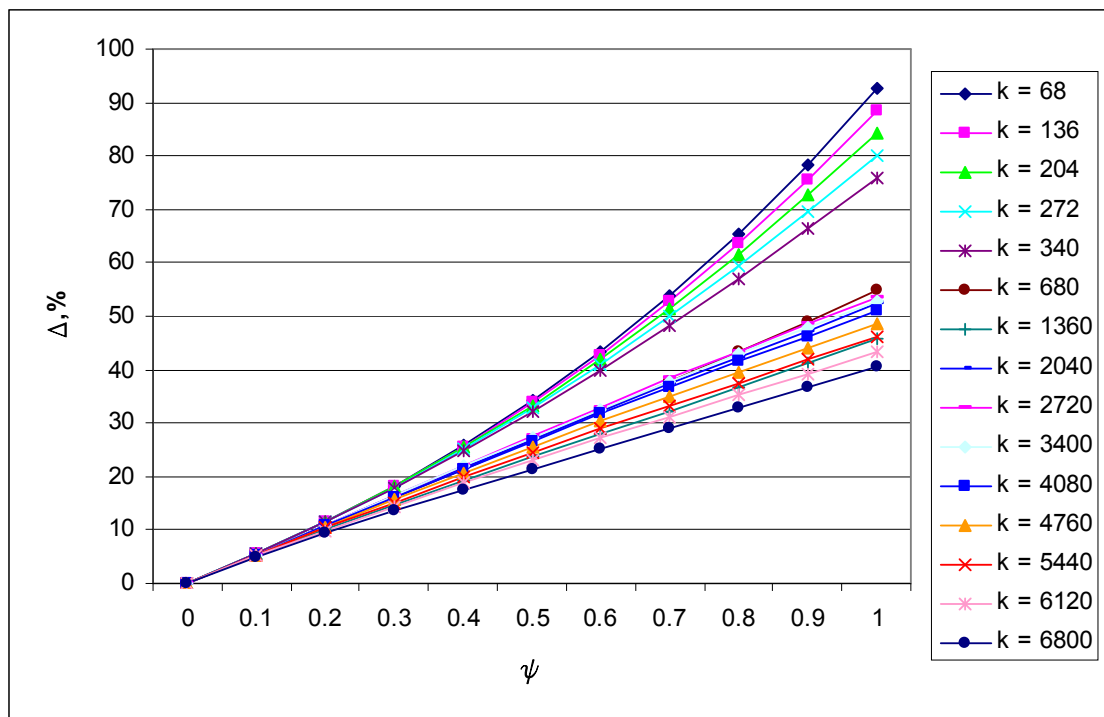
Направена е съпоставка на изменението на критичната сила и напречното преместване. Резултатите са представени таблично и графично.

**Таблица 3.12** Изменение на критичната сила

$\psi$	k = 68	k = 136	k = 204	k = 272	k = 340
0	0	0	0	0	0
0.1	5.513403	5.505066	5.495322	5.483781	5.469897
0.2	11.60163	11.56227	11.51636	11.46213	11.39711
0.3	18.34456	18.2395	18.11742	17.97394	17.80308
0.4	25.83316	25.61054	25.35345	25.05372	24.70064
0.5	34.16973	33.75343	33.27717	32.72849	32.09191
0.6	43.46714	42.7477	41.93537	41.01461	39.96771
0.7	53.84641	52.66988	51.36457	49.91575	48.30908
0.8	65.43204	63.58769	61.58692	59.42256	57.09117
0.9	78.34424	75.55315	72.60753	69.51498	66.28855
1	92.68819	88.59627	84.41452	80.1669	75.88051

$\psi$	k = 680	k = 1360	k = 2040	k = 2720	k = 3400
0	0	0	0	0	0
0.1	5.3151	5.179454	5.339999	5.357107	5.347697
0.2	10.69878	10.12765	10.80055	10.87709	10.83515
0.3	16.08184	14.80962	16.28925	16.4745	16.37359
0.4	21.44053	19.28731	21.72621	22.06594	21.88215
0.5	26.79207	23.64879	27.06039	27.58616	27.30321
0.6	32.17579	27.9693	32.27394	32.99735	32.60798
0.7	37.6364	32.30403	37.37569	38.28869	37.7924
0.8	43.21537	36.69197	42.39033	43.46948	42.86863
0.9	48.94817	41.16112	47.34901	48.56069	47.85708
1	54.8644	45.73232	52.28339	53.58827	52.78092

$\psi$	k = 4080	k = 4760	k = 5440	k = 6120	k = 6800
0	0	0	0	0	0
0.1	5.323577	5.284852	5.226231	5.135054	4.982078
0.2	10.7285	10.56081	10.31623	9.960199	9.431596
0.3	16.12032	15.73459	15.2008	14.48421	13.53994
0.4	21.42801	20.76134	19.88785	18.79776	17.48366
0.5	26.61489	25.63951	24.4213	22.98498	21.35575
0.6	31.67446	30.39092	28.84753	27.1016	25.20054
0.7	36.61903	35.04396	33.20321	31.18119	29.0396
0.8	41.46922	39.6252	37.51465	35.24386	32.88407
0.9	46.24751	44.15698	41.80051	39.3022	36.74032
1	50.97526	48.65753	46.07437	43.36474	40.61249



Фиг. 3.23. Изменение на критичната сила.

Вижда се, че влиянието на параметъра се отразява значително върху стойностите на критичната сила. Това влияние е различно за различна винклерова константа на еластичната среда. От табл. 3.12 се вижда добре, че при  $\psi = 0,1$  изменението на критичната сила много слабо се влияе от винклеровата константа и е около 5% при всеки един от разгледаните случаи. Не така обаче стои въпроса при  $\psi = 1$ . **В този случай изменението на критичната сила се влияе в значителна степен от винклеровата константа. Увеличението варира от 40,6% до към 92,7.** При по-ниски стойности на параметъра на еластичната среда увеличението на критичната сила във функция на  $\psi$  е по интензивно, докато при високите стойности “затихва”. Що се отнася до напречното преместване то се увеличава в горния край на пръта и намалява в долния при увеличение на страничното триене. Същевременно максималното напречно преместване също се измества към горния край.

От направеното изследване се вижда, че линейното разпределение на нормалното усилие по дължина на пръта може при определени условия да влияе значително върху увеличението на критичната сила откъдето следва, че този ефект в никакъв случай не бива да се пренебрегва. Отчитането му би довело до проектирането на значително по-икономични конструкции.

При други гранични условия Reddy и Valsangkar доказват, че увеличението на критичната сила може да достигне до три пъти. Всичко това налага по-внимателно и задълбочено параметрично изследване, при различни подпорни условия, различни модели на земната основа и различни модели на разпределение на нормалната сила.

### 3.5. Отчитане на разпределено осово натоварване по МКЕ. Моделиране на странично триене.

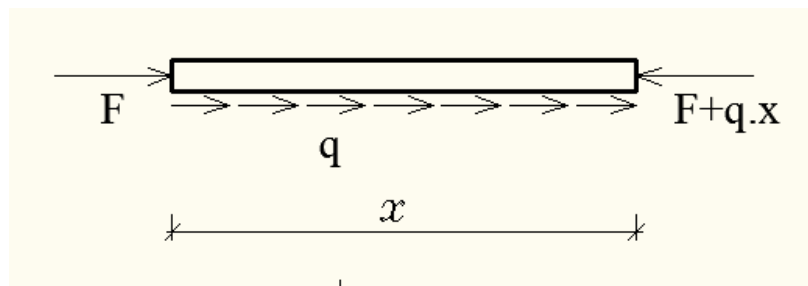
При прилагане на МКЕ е възможно също да се вземе предвид осово разпределено натоварване действащо върху елемента. Такова натоварване може да бъде собственото тегло или страничното триене, като и двете биха могли да имат съществено влияние върху устойчивостта на пръта. Да приемем, че върху елемента действа разпределен осов товар  $q$  (фиг.3.39). В такъв случай матрицата на геометрична коравина става двукомпонентна:

$$[k_G] = [k_{G1}] + [k_{G2}], \quad (3.88)$$

където:

$[k_{G1}]$  е локалната матрица на геометрична коравина, получена за концентрирана осова сила,

$[k_{G2}]$  е локалната матрица на геометрична коравина, получена за разпределен осов товар.



Фиг. 3.39. Осово разпределен товар върху елемента.

Както вече нееднократно бе отбелязано геометричната матрица на коравина  $[k_{G1}]$  се получава от условието:

$$[k_{G1}] = F \int_0^l \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} dx, \quad (3.89)$$

или елементната геометрична матрица при наличие на концентрирана сила е (при апроксимация с полином от трета степен):



$$[k_{G1}] = \frac{F}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}l & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}l \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

При отчитане на разпределеният осов товар ще имаме геометрична матрица на коравина получаваща се от зависимостта:

$$[k_{G2}] = q \int_0^l \frac{d\Phi_i}{dx} \frac{d\Phi_j}{dx} x dx, \quad (3.91)$$

където:

$q$  - интензивността на осово разпределения товар в рамките на отделния краен елемент.

Тогава матрицата  $[k_{G2}]$  в разгърнат вид изглежда по следния начин:

$$[k_{G2}] = q \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & \frac{1}{10}l & -\frac{6}{10} & 0 \\ \frac{1}{10}l & \frac{1}{30}l^2 & -\frac{1}{10}l & -\frac{1}{60}l^2 \\ -\frac{6}{10} & -\frac{1}{10}l & \frac{6}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{60}l^2 & 0 & \frac{1}{10}l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Страничното триене при определяне на осовата критична сила бихме могли да отчетем и посредством прилагане на еквивалентен модел със завишен коефициент на еластичната среда (последният ще отчита еквивалентното влияние на страничното триене). В такъв случай, ще имаме промени в матрица на коравина отчитаща влиянието на еластичната среда:

$$[k_r] = [k_{r1}] + [k_{r2}], \quad (3.93)$$

където:

$[k_{r1}]$  е локалната матрица на коравина, получена за съответната винклерова константа,

$[k_{r2}] = \mu[k_{r2}]$ , а  $\mu$  е коефициент, изразяващ процентното увеличение на винклеровата константа на еквивалентния модел.

*Реализацията на двата разгледани подхода е извършена с помощта на авторска програма на MATLAB. Резултатите са сравнени и с тези от параграф 3.4, намерени с помощта на SAP 2000. От приведените графики се вижда, че първия метод сравнен с резултатите от SAP 2000 дава незначителни разлики, както в стойностите на критичната сила, така и по-отношение на напречните премествания. Втория метод при подходящ избор на коефициента  $\mu$ , също дава малки разлики по отношение на критичната сила в сравнение с резултатите от SAP 2000. За сметка на това обаче, по отношение на преместванията съвсем логично се наблюдава драстична разлика, така че при определени условия втория метод дава възможност само за определяне на критичната сила, но не и за напречните премествания (фиг.3.40-3.43). За сега въпроса с определянето на коефициента  $\mu$  все още стои открит. Това са двата основни недостатъка на метода. Като голямо и основно негово предимство трябва да отчетем неговата простота в изчислително отношение.*

### **3.6. Отчитане влиянието на опорните условия при частично забит в еластична среда прът.**

В настоящият параграф предмет на разглеждане е параметричната зависимост на критичната сила от вариране на опорните условия, както и от отношението между свободната и намиращата се в еластична среда част от гредата. Еластичната среда отново е приета от винклеров тип с константен в дълбочина модул. Разглеждания еластичен прът има следните характеристики:  $l = 2m$ , тръбно напречно сечение с външен диаметър  $b = 0,068m$  и огъвна коравина  $EI = 42,48kN.m^2$ . Параметричното изследване е проведено за 15 различни стойности на еластичната среда при 5 различни отношения между свободната част и цялата дължина на пръта за 7 различни случая на подпиране в единия край на пръта.

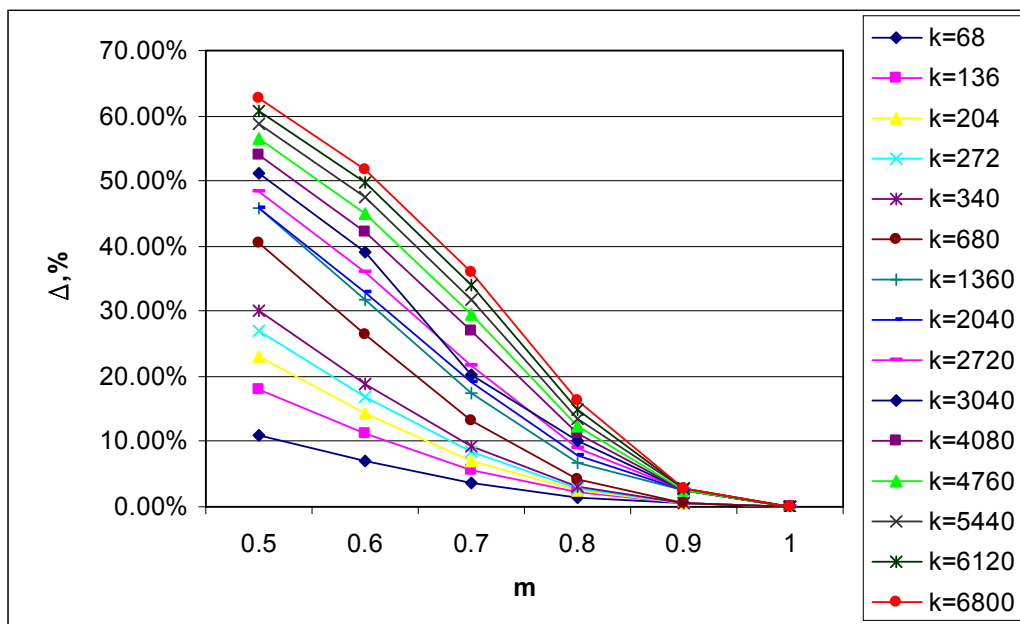
Направена е съпоставка на изменението на критичната сила (спрямо същата при  $m = 0$ ) и напречното преместване. В таблица 3.13 е представено изменението на критичната сила при вариране на отношението  $m$  при свободно подпиране в горния край. Същото изменение, но при свободен край е представено в таблица 3.14.

**Таблица 3.13** Изменение на критичната сила.

$m$	$k = 68$	$k = 136$	$k = 204$	$k = 272$	$k = 340$
0.5	10.98%	17.92%	22.98%	26.87%	30.02%
0.6	6.95%	11.22%	14.37%	16.83%	18.87%
0.7	3.63%	5.67%	7.16%	8.33%	9.30%
0.8	1.53%	2.14%	2.58%	2.92%	3.19%
0.9	0.64%	0.65%	0.66%	0.67%	0.68%
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

$m$	$k = 680$	$k = 1360$	$k = 2040$	$k = 2720$	$k = 3400$
0.5	40.50%	45.77%	45.82%	48.25%	51.12%
0.6	26.55%	31.68%	35.88%	16.83%	39.12%
0.7	13.27%	17.45%	19.03%	21.73%	20.38%
0.8	14.22%	6.84%	7.82%	8.97%	10.09%
0.9	0.70%	2.49%	2.51%	2.54%	2.58%
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

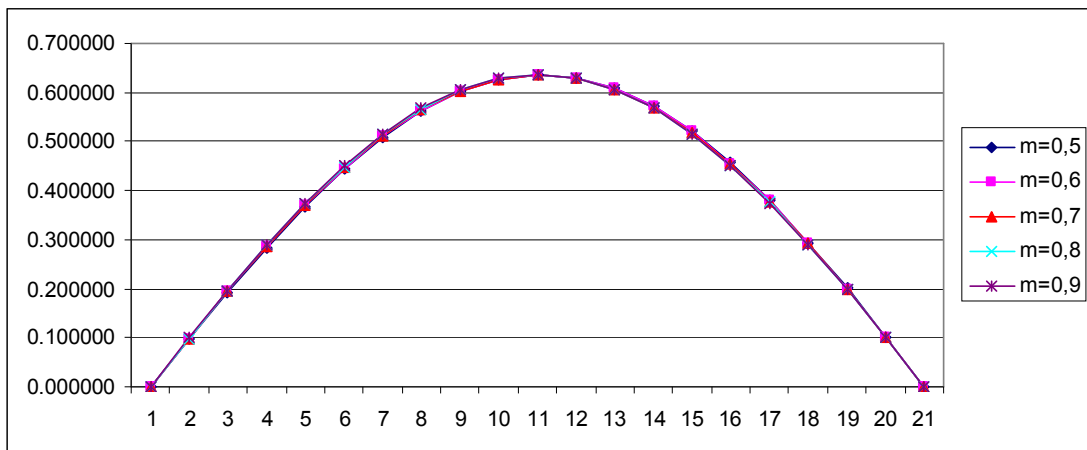
$m$	$k = 4080$	$k = 4760$	$k = 5440$	$k = 6120$	$k = 6800$
0.5	53.89%	56.43%	58.74%	60.81%	62.69%
0.6	42.13%	44.89%	47.40%	49.68%	51.77%
0.7	26.97%	29.40%	31.71%	33.93%	36.06%
0.8	11.21%	12.37%	13.61%	14.96%	16.44%
0.9	2.61%	2.66%	2.71%	2.79%	2.91%
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%



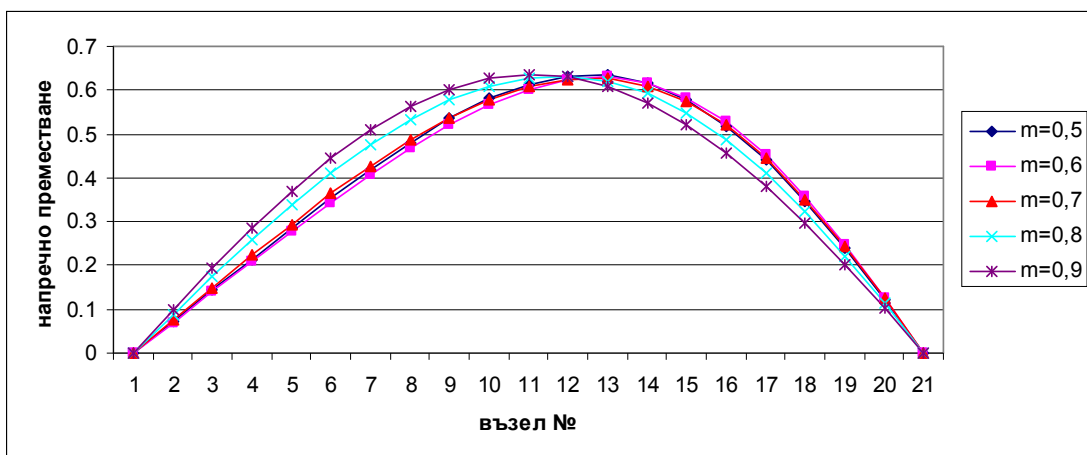
**Фиг. 3.45**

От представеното на фиг 3.45 и в таблица 3.13 се вижда, че изменението на отношението  $m$  влияе значително върху изменението на критичната сила. Това влияние е различно за различните стойности на винклеровата константа. Колкото по-малка е тя толкова по-малко е това влияние. Логично най-голяма е разликата при  $m = 0,5$  и варира от 10,98% (при най-малката стойност на винклеровата константа) до 62,69% (при най-голямата стойност на винклеровата константа). От графиката на фиг. 3.45 може да се прави извод за интензивността с която се изменя критичната сила във функция на  $m$ . При по-ниски стойности на винклеровата константа се наблюдава по-плавно намаление на критичната сила. При по-високи стойности на винклеровата константа намалението е по-рязко изразено, но се наблюдава тенденция към “затихване” при по-ниските стойности на  $m$  (графиката на функцията има инфлексна точка).

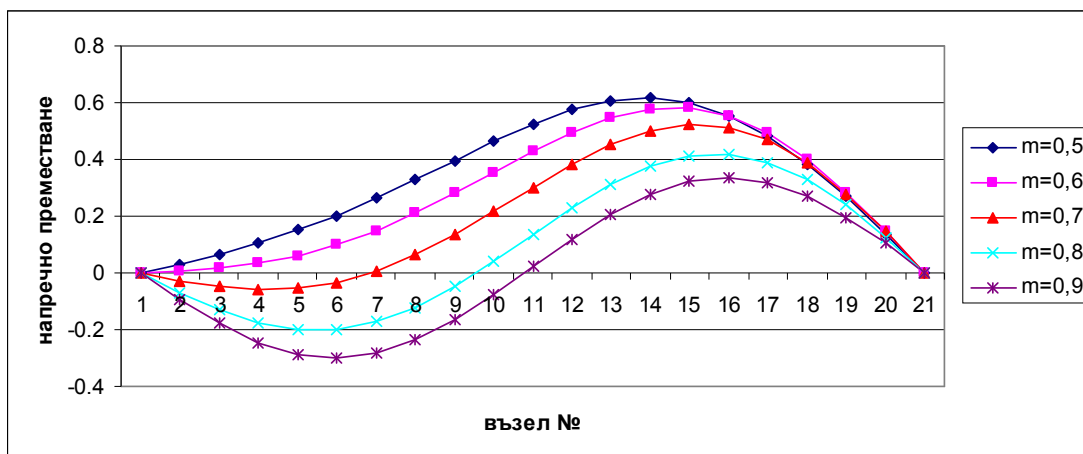
На фиг. 3.46-3.60 са дадени графиките на напречните премествания за различни винклерови константи във функция от  $m$ .



Фиг. 3.46



Фиг. 3.51



Фиг. 3.60

От приложените графики се вижда, че напречните премествания се различават незначително при ниски стойности на винклеровата константа и показват значително изменение при по-голяма коравина на еластичната среда. От параметричното изследване можем да направим извода, че при по-големи стойности на винклеровата константа изменението на критичната сила във функция на  $m$  е значително.

Таблица 3.14 Изменение на критичната сила.

m	k=68	k=136	k=204	k=272	k=340
0.5	85.22%	81.12%	78.33%	76.83%	76.15%
0.6	75.79%	70.75%	68.01%	67.03%	66.99%
0.7	63.37%	58.12%	56.02%	55.84%	56.50%
0.8	47.30%	42.72%	41.60%	42.14%	43.28%
0.9	26.58%	24.93%	23.37%	24.15%	25.22%

m	k=680	k=1360	k=2040	k=2720	k=3400
0.5	77.30%	81.62%	84.30%	85.97%	87.12%
0.6	70.48%	76.55%	79.85%	81.82%	83.16%
0.7	61.89%	69.16%	72.92%	75.16%	76.67%
0.8	49.55%	57.24%	61.23%	63.64%	65.33%
0.9	30.37%	36.66%	40.08%	42.25%	43.81%

m	k=4080	k=4760	k=5440	k=6120	k=6800
0.5	87.97%	88.63%	89.19%	89.64%	90.03%
0.6	84.14%	84.91%	85.55%	86.08%	86.55%
0.7	77.80%	78.71%	79.48%	80.13%	80.72%
0.8	66.63%	67.70%	68.62%	69.43%	70.16%
0.9	45.06%	46.12%	47.07%	47.93%	48.71%

Решението на разглежданите в настоящият труд проблеми може да се допълни в бъдеще с моделирането на контактната задача при динамични въздействия.

### Основни приноси в дисертацията според автора

1. Направен е критичен анализ на съществуващите решения на греда на еластична основа и на устойчивост на прът в еластична среда. Установена е една неточност в решението предложено от Снитко [77].
2. Изведени са изрази за функциите на формата при хиперболо-тригонометрична апроксимация на гредови краен елемент. Доказана е взаимна връзка между функциите на Крилов за края на елемента – формули (2.12.1) и (2.12.2).
3. Направено е сравнение между очертанието на функциите на формата при полиномна и при хиперболо-тригонометрична апроксимация, при различни стойности на винклеровата константа. Дадена е препоръка за класифициране на гредите спрямо относителната им коравина, обвързана с изменението на функциите на Крилов.
4. Предложена е модификация на винклеровия модел за двупластова среда. Предложен е начин за отчитане на закоравяването под двата края на гредата.
5. *Изследвани са размерите на “близката зона” и са дадени препоръки за приемането на нейните граници в широчина и в дълбочина. Разгледани са различни случаи на нееднородност на средата и влиянието им върху разпределението на напреженията в масива. Установено е, че наличието на по-слаб пласт променя значително размерите на “близката зона” най-вече в дълбочина.*
6. Направен е сравнителен анализ на формулите за получаване на винклеровата константа на база модела еластично изотропно полупространство в еазлични програмни системи.
7. Проведено е параметрично изследване на устойчивостта на греда в еластична среда по МКЕ при традициона полиномна и при хиперболо-тригонометрична апроксимация на функциите на формата. Изследването е проведено с ПП SAP 2000, както и с помощта на авторска програма на MATLAB. При при хиперболо-тригонометрична апроксимация са използвани съгласувана и несъгласувана с огъвната матрица геометрични матрици на коравина. Установено е, че използването на несъгласуваната матрица е в полза на сигурността.
8. Проверено е влиянието на промяната на дължината на пръта дължащо се на действието на реакцията на ограждащата го еластична среда върху критичната сила. Изведена е допълнителна корегираща матрица на коравина отчитаща това влияние по МКЕ.
9. *Анализирано е влиянието на различните закони за разпределение на реакцията на средата, както и на страничното триене върху критичната сила. Проведено е параметрично изследване. Установени са някои важни зависимости: Вертикалната поддаваемост под върха на пилота не оказва съществено влияние върху загубата на устойчивост, решаващи се оказват напречните премествания.*

## Литература

- [6] Банков Б. П., Ю. В. Павлова, Метод на крайните елементи в строителната механика, УАСГ, 1996, София
- [7] Банков Б. П., Строителна статика, част II, неопределими системи, УАСГ, 2001, София
- [14] Богачев К. Ю., Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений, 1998, Москва
- [15] Божинов Б., Т. Етимов, Д. Гочева, Изчисляване на конструкции върху еластична основа, Техника, 1982, София
- [20] Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, Физ.-мат. лит., 1967, Москва
- [23] Върбанов Х. П., Устойчивост и динамика на еластичните системи, Техника, 1989, София
- [38] Етимов Т., Г. Благоев, Автоматизирано изследване на пилотни фундаменти, Техника, 1990, София
- [39] Етимов Т., Съвместна работа на конструкции, фундаменти и земна основа, дисертация, 1991, София
- [44] Казаков К. С., Сравнителен анализ на модели за изследване на фундаментни плочи, УАСГ, дисертация, 2001, София
- [45] Казаков К., Метод на крайните елементи за моделиране на строителни конструкции, ВСУ, 2006, София
- [51] Карамански Т., Т. Ганев и др., Строителна механика, Техника, 1988, София
- [53] Кирилов, Основания и фундаменти, Транспорт, 1980, Москва
- [55] Костерин Э. В., Основания и фундаменти, В. Ш., 1978, Москва
- [56] Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, АН. СССР, 1930
- [60] Норми за проектиране на пилотно фундиране, БСА, кн. 6/1993
- [61] Норми за проектиране на плоско фундиране, 1996
- [63] Парлетт Б., Симетрична проблема собственных значений, Мир, 1983, Москва
- [65] Перельмутер А. В., В. И. Сливкер, Расчетные модели сооружений и возможность их анализа, Сталь, 2002, Киев
- [68] Проектирование и устройство свайных фундаментов, СП 50-102-2003
- [77] Снитко Н. Т., Строительная механика, 1972, Москва
- [78] СНиП 2.02.03-85, Свайные фундаменти
- [81] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, Наука, 1986, Москва
- [102] Bathe K. J., Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996
- [122] Eisenberger M., D. Yankelevsky, Exact stiffness matrix for beam on elastic foundation, Computers & Structures, 21, p. 1355-1359, 1985
- [123] Eisenberger M., D. Yankelevsky and J. Clastomic, Stability of beams on elastic foundation, Computers & Structures, 24 (1), p. 135-139, 1986
- [129] Hetenei M., Beam on Elastic Foundations, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1964, Michigan
- [148] Melerski E. S., Design Analysis of Beam, Circular Plates and Cylindrical Tanks on Elastic Foundations, Taylor & Francis, 2006, London
- [151] Morfidis K., Exact matrices for beams on three-parameter elastic foundation, Computers & Structures, 85, p. 1243-1256, 2007

- [162] Petrakis I. N., Buckling of piles, 5<sup>th</sup> GRACM, 2005
- [166] Razaqpur A. G., K. R. Shah, Exact Analysis of beam on two-parameter elastic foundations, *Solids & Structures*, 27 (4), p. 435-454, 1991
- [173] Terzaghi K., *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley & Sons, 1943, New York
- [175] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, 1961, New York
- [181] Wittrick W. H., F. W. Williams, A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures, *Mech. Appl. Math.*, 24 (3), p. 263-284, 1971



### **Публикации на автора свързани с дисертацията**

1. Банков Б., К. Казаков, И. Вайсилов, Л. Любенов, Възможности за приложение на МКЕ при изследване на прът в еластична среда, сп. "Строителство", бр. 6, София (2008);
2. Банков Б., К. Казаков, Л. Любенов, Хиперболо-тригонометрично апроксимиране на гредови функции на формата при прилагането на метода на крайните елементи за решаване на греда на еластична основа, X Международна научна конференция ВСУ "Л. Каравелов", София (2010);
3. Банков Б., К. Казаков, Л. Любенов, Изследване на устойчивостта на греда на еластична основа по МКЕ при хиперболо-тригонометрични функции на формата, 5-та Международна научно-приложна конференция, ВСУ "Черноризец Храбър", Варна (2011);
4. Банков Б., Л. Любенов, Решение на греда на еластична основа при променлив коефициент на леглото по МКЕ, XI Международна научна конференция ВСУ "Л. Каравелов", София (2011);
5. Любенов. Л, Б. Банков, К. Казаков, Методи за определяне на винклеровата константа в някои програмни системи, Международна научна конференция, DCB 2012, Варна (2012).